

1. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck, Michael Reyer

Abgabe am 23.4.2007 in der Vorlesung/Übung

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion $G_X(z)$ einer negativ-binomialverteilten Zufallsvariable $X \sim \overline{\text{Bin}}(r, p)$ mit $r \in \mathbb{N}$ und $0 < p < 1$ gilt

$$G_X(z) = \left(\frac{p}{1 - (1-p)z} \right)^r, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\overline{\text{Bin}}(r, p) = \underbrace{\text{Geo}(p) * \dots * \text{Geo}(p)}_{r\text{-mal}}$.

Aufgabe 2. Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Träger \mathbb{N}_0 und Zähldichte $P(X = k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Die Funktionen $Q_X(z) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $R_X(z) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$Q_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) z^k, \quad R_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X \leq k) z^k.$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen gelten:

- $P(X > k) = \frac{1}{k!} Q_X^{(k)}(0)$ und $P(X \leq k) = \frac{1}{k!} R_X^{(k)}(0)$.
- $R_X(z)(1-z) = G_X(z)$ und $Q_X(z)(1-z) = 1 - G_X(z)$.

Aufgabe 3. In einem paketorientierten Netzwerk kommt ein einzelnes Datenpaket mit Wahrscheinlichkeit p fehlerfrei beim Empfänger an. Die Übertragung verschiedener Pakete kann als stochastisch unabhängig angesehen werden. Wenn in einem Paket ein Fehler auftritt, wird die Übertragung solange wiederholt, bis das Paket fehlerfrei angekommen ist.

- Die Zufallsvariable X beschreibe, wie oft ein einzelnes Paket gesendet werden muss, bis es ohne Fehler empfangen wird. Wie ist die Zufallsvariable X verteilt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist keine und mit welcher Wahrscheinlichkeit sind genau 2 Wiederholungen der Übertragung nötig? Wie groß muss p mindestens sein, so dass mit Wahrscheinlichkeit 0.99 höchstens drei erneute Übertragungen pro Paket nötig sind?
- Um zu verhindern, dass ein einzelnes wiederholt übertragenes Paket das ganze Netz blockiert, wird in einem anderen Netzwerk maximal 10 mal versucht, ein Paket zu übertragen. Wie sieht die Verteilung der Zufallsvariablen Y in diesem System aus, welche die Anzahl der Übertragungsversuche beschreibt?