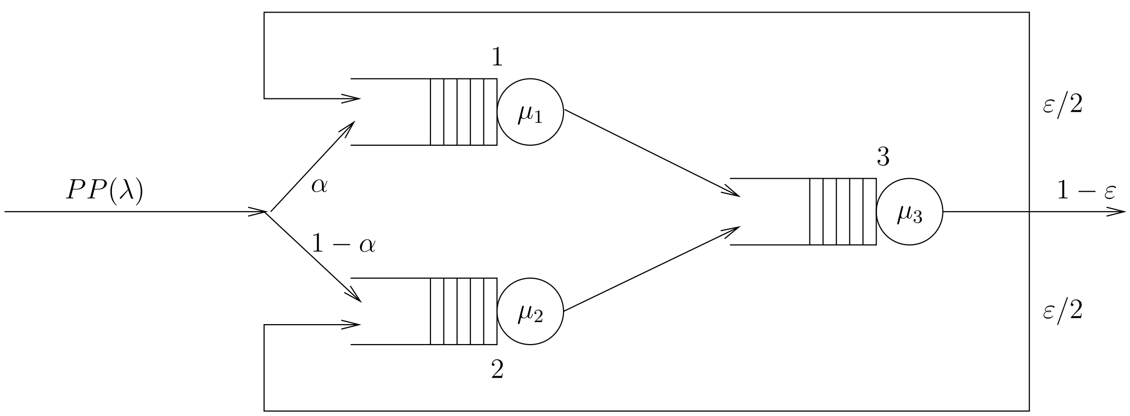
Zusatzübung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck, Michael Reyer

17.7.2007, 15:00 Uhr

Aufgabe 1. Anforderungen, die gemäß einem Poisson-Prozess mit Ankunftsrate λ an einem Server-Cluster ankommen, werden zunächst mit Wahrscheinlichkeit α bzw. $1-\alpha$ auf Server 1 bzw. 2 verteilt und dort bearbeitet. Nach der Bearbeitung wird das Ergebnis an einen dritten Server weitergeleitet. Jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\varepsilon/2$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, werden die Aufträge anschließend an einen der ersten beiden Server zurck gegeben. Mit Wahrscheinlichkeit $1-\varepsilon$ verlassen die Anforderungen das Netz. Die Server 1, 2 und 3 haben jeweils unendliche Wartekapazität und exponentialverteilte Bedienzeiten mit Parametern μ_1, μ_2 und μ_3, jeweils größer Null. Das System kann durch das folgende Warteschlangennetz beschrieben werden:



Es seien zunächst $\lambda > 0$ und $\epsilon < 1$.

a) Um was für ein Warteschlangennetz handelt es sich?

b) Geben Sie ein Modell mit Zustandsraum und Routingmatrix an.

c) Wann existiert eine stationäre Verteilung und wie lautet diese?

d) Wie muss α gewählt werden, damit im stationären Zustand die mittleren Gesamtverweilzeiten an Server 1 und Server 2 gleich sind?

Nehmen Sie nun an, dass $\lambda = 0$ und $\epsilon = 1$ gelte. Ferner seien $\mu_1 = \mu_2 = 2$ und $\mu_3 = 3$. Es befinden sich M Anforderungen im System.

e) Um was für ein Warteschlangennetz handelt es sich nun?

f) Bestimmen Sie den Zustandsraum und seine Mächtigkeit.

g) Wie lautet für $M = 3$ die stationäre Verteilung?

Aufgabe 2. Die Bearbeitung von Aufträgen an einem Server lasse sich durch ein M/E$_k$/1-System, also ein Bediensystem mit einem PP(λ)-verteilten Ankunftsstrom und Erl(k, μ)-verteilten Bedienzeiten, beschreiben. Für die Parameter gelte $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda, \mu > 0$.

a) Für welche Werte von λ, μ und k existiert eine stationäre Verteilung? Geben Sie für diese Werte die erwartete Anzahl von Anforderungen im System und die erwartete Wartezeit in der Warteschlange im stationären Zustand an. Wie sind diese Werte von der Bedienstrategie abhängig?

b) Für welche Parameter kann das obige System durch einen Geburts- und Todesprozess modelliert werden? Geben Sie die stationäre Verteilung an.

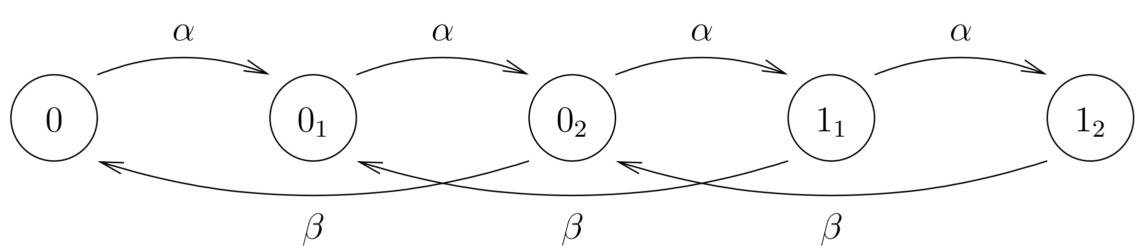
c) Sei nun $k = 2$ und die Warteschlangenkapazität 1. Geben Sie den Zustandsraum und den Intensitätsgraphen eines Markov-Prozesses an, der dieses M/E$_2$/1/1-System modelliert.

   Hinweise:

   - Beachten Sie, dass eine Erlang-Verteilung mit k Phasen die k-fache Faltung von Exponentialverteilungen ist.
   - Berücksichtigen Sie die Phasen der Erlang-Verteilung bei der Modellierung des Zustandsraumes.

d) Bestimmen Sie für allgemeines λ und μ die globalen Gleichgewichtsgleichungen des Modells aus c). Berechnen Sie die stationäre Verteilung explizit für $\lambda = 1$ und $\mu = 2$.

e) Betrachten Sie den folgenden Intensitätsgraphen:



   Wie lautet die stationäre Verteilung des zugehörigen Prozesses für $\alpha = 2$ und $\beta = 1$? Geben Sie die Übergangsmatrix und den Übergangsgraph der eingebetteten Markov-Kette an.