

10. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Dr. Michael Reyer

2.7.2012

Aufgabe 1. Es sei $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_J(t))$ der beschreibende Markoff-Prozess eines offenen Jackson-Netzes mit Fluss $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_J)$ und Routingmatrix \mathbf{R} , wobei $r_{ii} = 0$ für alle $i = 1, \dots, J$ gelte. Man fasse die Stationen K bis J zu einer Station K auf folgende Weise zusammen:

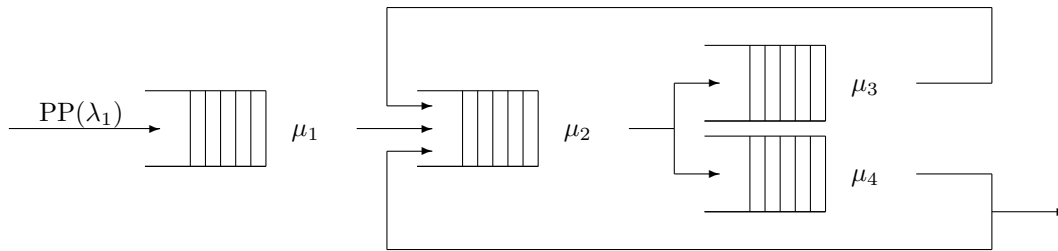
Es sei $\tilde{\mathbf{X}}(t) = (\tilde{X}_1(t), \dots, \tilde{X}_K(t))$, $K < J$, der beschreibende Markoff-Prozess des offenen Jackson-Netzes mit K Stationen und die Matrix $\tilde{\mathbf{R}} \in \mathbb{R}^{(K+1) \times (K+1)}$ sei definiert durch:

$$\tilde{r}_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{k=K}^J \Lambda_k r_{kj}}{\sum_{l=K}^J \Lambda_l} & \text{für } i = K, \quad j \in \{0, \dots, K-1\} \\ \frac{\sum_{k=K}^J r_{ik}}{\sum_{k=K}^J \Lambda_k} & \text{für } i \in \{0, \dots, K-1\}, \quad j = K \\ \frac{\sum_{k=K}^J \Lambda_k \sum_{j=K}^J r_{kj}}{\sum_{l=K}^J \Lambda_l} & \text{für } i = j = K \\ r_{ij} & \text{für sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass durch $\tilde{\mathbf{R}}$ ebenfalls eine Routingmatrix definiert wird und dass für den Fluss $\tilde{\mathbf{\Lambda}} = (\tilde{\Lambda}_1, \dots, \tilde{\Lambda}_K)$ von $\tilde{\mathbf{X}}(t)$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_i &= \Lambda_i \quad \text{für } i \in \{1, \dots, K-1\}, \\ \tilde{\Lambda}_K &= \sum_{k=K}^J \Lambda_k. \end{aligned}$$

Aufgabe 2. Gegeben sei das folgende offene Jackson-Netz:



Die erste Station sei ein $M/M/\infty$ -System und die anderen Stationen seien $M/M/1/\infty$ -Systeme. Die Bedienzeiten seien exponentialverteilt mit Erwartungswerten

$$\frac{1}{\mu_2} = 0.04 \text{ s}, \quad \frac{1}{\mu_3} = 0.03 \text{ s}, \quad \frac{1}{\mu_4} = 0.06 \text{ s}$$

bzw. Bedienrate $\mu_1 = 2$. Der Ankunftsprozess sei ein Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda = \lambda_1 = 4$ Jobs/s. Ferner seien die Routing-Wahrscheinlichkeiten gegeben durch:

$$r_{12} = r_{32} = 1, \quad r_{23} = r_{24} = 0.5, \quad r_{42} = 0.6, \quad r_{40} = 0.4.$$

- a) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix an.
- b) Berechnen Sie die stationäre Verteilung.
- c) Das System befinde sich im stationären Zustand. Berechnen Sie für jede Station die folgenden Größen:
 - i) Auslastung,
 - ii) mittlere Anzahl von Anforderungen,
 - iii) mittlere Verweilzeit,
 - iv) mittlere Wartezeit,