

### 3. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer, Alper Tokel  
04.05.2015

**Aufgabe 1.** Sei  $\mathcal{S}$  ein unendlicher, aber abzählbarer Zustandsraum, und seien  $\mathbf{\Pi} = (p_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$  und  $\mathbf{\Phi} = (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$  stochastische Matrizen und  $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in \mathcal{S}}$  ein stochastischer Vektor.

a) Zeigen Sie, dass für alle  $i, j \in \mathcal{S}$  die Reihen

$$\sum_{l \in \mathcal{S}} p_{il} q_{lj} \quad \text{und} \quad \sum_{l \in \mathcal{S}} v_l p_{lj}$$

konvergieren.

b) Zeigen Sie, dass  $\mathbf{\Pi\Phi}$  mit

$$(\mathbf{\Pi\Phi})_{ij} = \sum_{l \in \mathcal{S}} p_{il} q_{lj}$$

wieder eine stochastische Matrix ist, und dass  $\mathbf{v\Pi}$  mit

$$(\mathbf{v\Pi})_j = \sum_{l \in \mathcal{S}} v_l p_{lj}$$

ein stochastischer Vektor ist.

c) Zeigen Sie, dass allgemein (auch für endlichen Zustandsraum) gilt: Existiert

$$\mathbf{p}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}^{(n)}$$

unabhängig von der Anfangsverteilung  $\mathbf{p}(0)$ , so ist  $\mathbf{p}^* \mathbf{\Pi} = \mathbf{p}^*$ . Eine Grenzverteilung ist also, wenn sie existiert, stets auch eine stationäre Verteilung.

**Aufgabe 2.** Es sei  $\mathbf{\Pi}$  die Übergangsmatrix einer homogenen Markov-Kette, dann können die  $n$ -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$  nach Proposition 3.3 c) als

$$p_{ij}^{(n)} = (\mathbf{\Pi}^n)_{ij}$$

ausgedrückt werden, wobei  $i, j \in \mathcal{S}$  und  $n \in \mathbb{N}$  sein müssen. Zeigen Sie basierend darauf die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung* [Proposition 3.3 d)]

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{l \in \mathcal{S}} p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)}$$

für  $i, j \in \mathcal{S}$  und  $n, m \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 3.** Es sei  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ ,  $\gamma = \alpha + \beta > 0$  und

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix der Markov-Kette aus Beispiel 3.4 (Satellitenkanal). Zeigen Sie für  $n \in \mathbb{N}$  per vollständiger Induktion

$$\mathbf{\Pi}^n = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + \frac{(1 - \gamma)^n}{\gamma} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix},$$

und daraus

$$\mathbf{p}(n) = \frac{1}{\gamma}(\beta, \alpha) + \frac{(1 - \gamma)^n(p_1\alpha - p_2\beta)}{\gamma}(1, -1)$$

für eine beliebige Anfangsverteilung  $\mathbf{p}(0) = (p_1, p_2)$ .