Zusatzübung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer, Alper Tokel

20.07.2015

Aufgabe 1. An einem Mail-Transfer-Agenten (MTA) treffen Spam- und Nutz-Emails gemäß zweier unabhängiger Poisson-Prozesse ein. Im Schnitt kommen λ_S Spam- und λ_N Nutz-Emails pro Minute an.

a) Wie ist die Anzahl der Emails, die im Zeitraum von t Minuten eintreffen, verteilt? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufällig ausgewählten Zeitraum von einer Minute höchstens eine Spam-Email eintrifft, wenn $\lambda_S = 6.6$ ist?

Wir nehmen einen beliebig großen FIFO-Puffer für eingehende Emails an, und die Bearbeitungszeit ist exponentialverteilt mit Parameter μ. Weiter ist die Ankunftsrate so, dass 100 Emails pro Minute eintreffen. Man betrachte das System im Gleichgewicht.

b) Welches Bediensystem kann zur Modellierung der Anzahl an Emails im System verwendet werden?

c) Welche Bedienrate muss der MTA haben, um eine mittlere Antwortzeit von 30 Sekunden einzuhalten? Wie viele Emails befinden sich in diesem Fall im mittel im System?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich eine Email länger als 40 Sekunden in der Warteschlange befindet, wenn $\mu = 104$ ist?

Der MTA besteht aus zwei Bearbeitungsschritten. Schritt Eins markiert Spam-Emails und Schritt Zwei ordnet Emails Benutzern zu. Die Bedienrate der zwei Bearbeitungsschritte ist jeweils stochastisch unabhängig exponentialverteilt mit den Parametern $\mu_S = \mu_A = 104$.

e) Welche Verteilung hat die Bedienzeit? Um was für ein Bediensystem handelt es sich?

f) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Bedienzeitverteilung mit Hilfe der Laplace-Transformierten.

Es steht leider kein MTA mit einer ausreichenden Bedienrate zur Verfügung. Aus der zur Verfügung stehenden Hardware kann ein System mit drei MTA gebaut werden. Die Bearbeitungszeiten sind exponentialverteilt mit Parameter $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3$. Das System wird als Geburts- und Todesprozess modelliert, in dem die Bedienintensitäten wie folgt aussehen:

$$\mu_k = \begin{cases} \hat{\mu}_{i_1} & , k = 1 \\ \hat{\mu}_{i_1} + \hat{\mu}_{i_2} & , k = 2 \\ \hat{\mu}_{i_1} + \hat{\mu}_{i_2} + \hat{\mu}_{i_3} & , k \geq 3 \end{cases}$$

wobei (i_1, i_2, i_3) ist eine Permutation von $(1, 2, 3)$.

g) Für den Fall, dass $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_3$ ist. Um was für ein Bediensystem handelt es sich?

Im Folgenden ist $\hat{\mu}_1 = 80, \hat{\mu}_2 = 30, \hat{\mu}_3 = 40$.

h) Für welche Permutationen (i_1, i_2, i_3) der MTA wird im Gleichgewichtszustand die minimale beziehungsweise maximale erwartete Warteschlangenlänge für das System angenommen? Geben sie diese Permutationen an und begründen Sie kurz ihre Antwort.

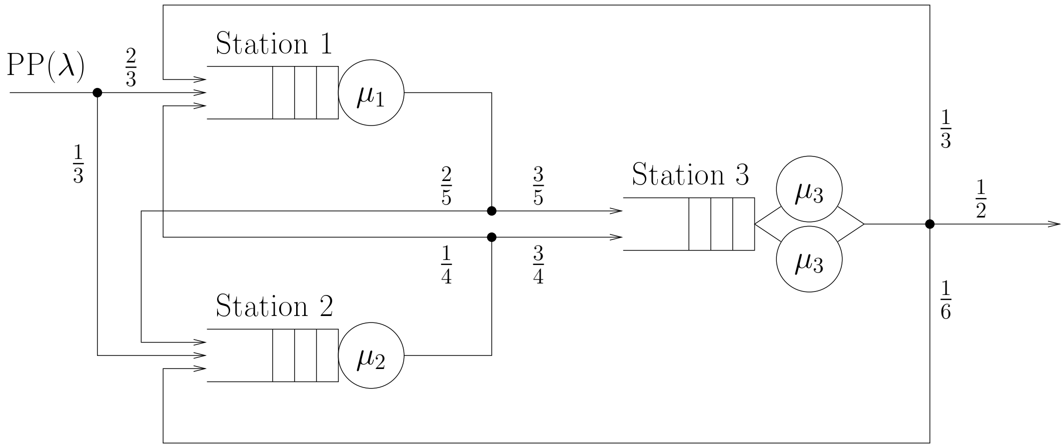
i) Berechnen Sie für die zwei gefunden Permutationen die erwartete Warteschlangenlänge im Gleichgewichtszustand.

Hinweis Für alle $0 < x < 1$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} j \cdot x^{j-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

- bitte wenden -

Aufgabe 2. Gegeben sei folgendes Warteschlangennetz mit $J = 3$ Stationen:



Die Stationen 1 und 2 sind $M/M/1/\infty$-Systeme, Station 3 ist ein $M/M/2/\infty$-System, jeweils mit Bedienraten $\mu_i > 0$. Der Ankunftsprozess ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda = 3$, die Routingparameter sind in der Skizze angegeben. Offenbar kann dieses Warteschlangennetz als Jackson-Netz modelliert werden.

a) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix an.

b) Lösen Sie die Flussgleichungen.

c) Wann existiert allgemein eine stationäre Verteilung?

Im Folgenden seien $\mu_1 = 10$, $\mu_2 = 10$ und $\mu_3 = 4$.

d) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

e) Wie groß ist die Auslastung der drei Stationen, also die Wahrscheinlichkeit, dass sich in der jeweiligen Station mindestens eine Anforderung befindet?

Das Warteschlangennetz wird jetzt zu einem geschlossenen Jackson-Netz modifiziert. Die Flüsse aus der Außenwelt in das Netz und der Fluss aus Station 3 in die Außenwelt fallen weg. Die neuen Routingparameter für die Anforderungen, die Station 3 verlassen, lauten $r_{31} = 2/3$ und $r_{32} = 1/3$. Es befinden sich $M = 2$ Anforderungen im Netz.

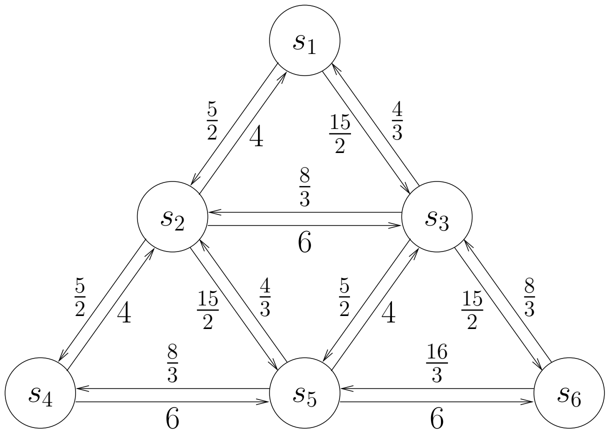
f) Skizzieren Sie das geschlossene Jackson-Netz analog zur obigen Skizze.

g) Geben Sie den Zustandsraum und die Routingmatrix des geschlossenen Netzes an. Wie groß ist der Zustandsraum?

h) Bestimmen Sie diejenige Lösung der Flussgleichungen, bei der $\Lambda_1 = 5$ ist.

i) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

j) Der das geschlossene Jackson-Netz beschreibende Markov-Prozess besitzt den folgenden Intensitätsgraphen:



Geben Sie die Zuordnung der Zustände $s_1, \ldots, s_6$ an. Begründen Sie Ihre Zuordnung. Ist die eingebettete Markov-Kette periodisch oder aperiodisch?