

Formelblatt Theoretische Informationstechnik

Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

- (i) $P(\Omega) = 1$.
- (ii) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \forall A_n \in \mathfrak{A}$,
 $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \text{ mit } i \neq j$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A, B \in \mathfrak{A}, \quad P(B) > 0.$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayes-Formel

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) \cdot P(B_n), \quad \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n) \cdot P(B_n)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(A|B_j) \cdot P(B_j)} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(A) > 0.$$

Stochastische Unabhängigkeit (Ereignisse)

$A, B \in \mathfrak{A}$ heißen stochastisch unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Diskrete Zufallsvariable

$X: \Omega \rightarrow T = \{t_1, t_2, \dots\} \subset \mathbb{R}, \quad P(X = t_i) = f_X(t_i)$.

Diskrete Verteilungen

a) Diskrete Gleichverteilung:

$$P(X = i) = \frac{1}{n} \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

b) Bernoulli-Verteilung:

$$P(X = 1) = p \quad \text{und} \quad P(X = 0) = 1 - p, \quad p \in [0, 1].$$

c) Binomialverteilung:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad p \in [0, 1].$$

d) Geometrische Verteilung:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad p \in (0, 1].$$

e) Poissonverteilung:

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad \lambda > 0.$$

Absolut-stetige Zufallsvariable

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$

Absolut-stetige Verteilungen

a) Normalverteilung:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Bezeichnung: $X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.

b) Gleich- oder Rechteckverteilung:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$

Bezeichnung: $X \sim R(a, b), a < b \in \mathbb{R}$.

c) Exponentialverteilung:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$$

Bezeichnung: $X \sim \text{Exp}(\lambda), \lambda > 0$.

d) Rayleigh-Verteilung:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \cdot \mathbb{I}_{[0,\infty)}(r)$$

Bezeichnung: $R \sim \text{Ray}(\sigma^2), \sigma^2 > 0$.

e) Rice-Verteilung:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2 + \mu^2}{2\sigma^2}} \cdot I_0\left(\frac{r\mu}{\sigma^2}\right), \quad I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \vartheta} d\vartheta$$

Bezeichnung: $R \sim \text{Rice}(\mu, \sigma^2), \mu > 0, \sigma^2 > 0$.

f) Lognormal-Verteilung:

$$f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad y > 0$$

Bezeichnung: $Y \sim \text{LogN}(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.

Erwartungswert

a) X diskrete Zufallsvariable:

$$E(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) f_X(x_i) \quad (\text{falls existent}).$$

b) X absolut-stetige Zufallsvariable:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (\text{falls existent}).$$

Varianz, Kovarianz, Korrelation

a) $V(X) = E((X - E(X))^2)$

b) $\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$

c) $\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$

Erwartungswertvektor und Kovarianzmatrix

a) $E(\mathbf{X}) = (E(X_1), \dots, E(X_n))' \in \mathbb{R}^n$

b) $\text{Cov}(\mathbf{X}) = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

n -dimensionale Normalverteilung

\mathbf{X} n -dimensional normalverteilt mit regulärer Kovarianzmatrix \mathbf{C} besitzt die Dichte

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right\}.$$

Bezeichnung: $\mathbf{X} \sim N_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$.

Stochastische Unabhängigkeit (Zufallsvariablen)

X_1, \dots, X_n (absolut-stetig) heißen stochastisch unabhängig, falls

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n) \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Transformationsatz

Unter den Annahmen

$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen,

$T: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv,

$$\left| \left(\frac{\partial T_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right| > 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n)' \in M,$$

besitzt der Zufallsvektor $\mathbf{Y} = T(\mathbf{X})$ eine Dichte

$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{\left| \left(\frac{\partial T_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) \Big|_{\mathbf{x}=T^{-1}(y_1, \dots, y_n)} \right|} f_{\mathbf{X}}(T^{-1}(y_1, \dots, y_n))$$

$$= \left| \left(\frac{\partial T_i^{-1}(y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j} \right) \right| f_{\mathbf{X}}(T^{-1}(y_1, \dots, y_n)),$$

$$(y_1, \dots, y_n)' \in T(M).$$

Erweiterter Arcustangens $\angle(x, y)$

$$\angle(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & x > 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}.$$

Summen von Zufallsvariablen

$\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ Zufallsvektor mit Dichte $f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$.

Dann besitzt $Y = X_1 + X_2$ die Dichte

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}(t, y-t) dt.$$

Komplexe Normalverteilung

a) $\mathbf{X} = \mathbf{U} + i\mathbf{V} \in \mathbb{C}^n$ heißt komplex normalverteilt, wenn $(\mathbf{U}, \mathbf{V})'$ $2n$ -dimensional normalverteilt ist.

b) \mathbf{X} ist zirkulär symmetrisch komplex normalverteilt, wenn

$$\text{Cov} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{Re } \mathbf{Q} & -\text{Im } \mathbf{Q} \\ \text{Im } \mathbf{Q} & \text{Re } \mathbf{Q} \end{pmatrix}$$

für eine hermitesche, n.n.d. Matrix \mathbf{Q} , $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q})$.

c) $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q})$, \mathbf{Q} regulär $\implies \mathbf{X}$ besitzt die Dichte

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = [\det(\pi\mathbf{Q})]^{-1} \exp\{-\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu} \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\}.$$

d) $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q}) \implies \text{E}\left((\mathbf{X} - \text{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \text{E}(\mathbf{X}))^*\right) = \mathbf{Q}$.

e) $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n} \implies \mathbf{AX} \sim \text{SCN}(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{AQA}^*)$.

f) $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{Q}_1)$, $\mathbf{Y} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{Q}_2)$, \mathbf{X}, \mathbf{Y} stochastisch unabhängig $\implies \mathbf{X} + \mathbf{Y} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2)$.

g) $\mathbf{X} \sim \text{SCN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{Q})$, \mathbf{Q} regulär $\implies \text{H}(\mathbf{X}) = \log|\pi e \mathbf{Q}|$.

Stochastische Prozesse

$\{X(t) \mid t \in T\}$, $\{Y(t) \mid t \in T\}$, $T \subseteq \mathbb{R}$:

a) $\mu_X(t) = \text{E}(X(t))$,

b) $R_{XX}(t_1, t_2) = \text{E}(X(t_1)X^*(t_2))$,

c) $C_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \cdot \mu_X^*(t_2)$,

d) $R_{XY}(t_1, t_2) = \text{E}(X(t_1)Y^*(t_2))$.

Leistungsdichtespektrum

a) $\text{E}(|X(t)|^2) = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(f) df$,

b) $S_{XX}(f) \in \mathbb{R}$ und $S_{XX}(f) \geq 0 \quad \forall f \in \mathbb{R}$,

c) $S_{XX}(f) = S_{XX}(-f)$, falls $R_{XX}(t) \in \mathbb{R}$.

LTI-Systeme

a) $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u) du$,

b) $\mu_Y(t) = \text{E}(Y(t)) = \mu_X(t) \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du$,

c) $R_{YY}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \int_{-\infty}^{\infty} h^*(v)R_{XX}(t-u+v) dv du$,

d) $S_{YY}(f) = |H(f)|^2 S_{XX}(f)$.

Entropie

$$\text{H}(X) = -\sum_j P(X = x_j) \log P(X = x_j)$$

Gemeinsame Entropie

$$\text{H}(X, Y) = -\sum_{i,j} P(X = x_i, Y = y_j) \log P(X = x_i, Y = y_j)$$

Bedingte Entropie

$$\text{H}(X|Y) = -\sum_{i,j} P(X = x_i, Y = y_j) \log P(X = x_i|Y = y_j)$$

Transformation

$$\text{I}(X; Y) = \text{H}(X) - \text{H}(X|Y)$$

Differentielle Entropie

$$\text{H}(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx$$

Gemeinsame differentielle Entropie

$$\text{H}(X, Y) = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log f(x, y) dx dy$$

Bedingte differentielle Entropie

$$\text{H}(X|Y) = -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \log f(x|y) dx dy$$

Kullback-Leibler-Distanz

$$\text{D}(f \parallel g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{g(x)} dx \quad (\text{kontinuierlich})$$

$$\text{D}(\mathbf{p} \parallel \mathbf{q}) = \sum_i p_i \log \frac{p_i}{q_i} \quad (\text{diskret})$$

Entropie der Normalverteilung

$$\mathbf{X} \sim \text{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) \implies \text{H}(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \ln((2\pi e)^n |\mathbf{C}|).$$

Binärer symmetrischer Kanal

$$C = \max_{(p_0, p_1)} \text{I}(X; Y) = 1 + (1 - \epsilon) \log_2(1 - \epsilon) + \epsilon \log_2 \epsilon$$

Gaußkanal mit binärer Eingabe

$$C = \max_{(p_0, p_1)} \text{I}(X; Y) = 1 - \text{E}[\log_2(1 + e^{-W})], \quad W \sim \text{N}\left(\frac{2\mu^2}{\sigma^2}, \frac{4\mu^2}{\sigma^2}\right).$$

Reeller Gaußkanal

$$C = \max_{\text{E}(X^2) \leq L} \text{I}(X; Y) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{L}{\sigma^2}\right)$$

Paralleler Gaußkanal

$$C = \max_{\sum_{i=1}^n \text{E}(X_i^2) \leq L} \text{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \frac{(\nu - \lambda_i)^+}{\lambda_i}\right),$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}} = \mathbf{T} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mathbf{T}', \quad \sum_{i=1}^n (\nu - \lambda_i)^+ = L.$$

Bandbegrenzer Gaußkanal

$$C = \max_{\text{E}(X^2) \leq L} \text{I}(X; Y) = W \ln\left(1 + \frac{L}{N_0 W}\right)$$

MIMO-Kanal (festes \mathbf{H})

$$C = \max_{\text{E}(\mathbf{X}^* \mathbf{X}) \leq L} \text{I}(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) = \sum_{i=1}^t \left[\log\left(\frac{\nu \lambda_i}{\sigma^2}\right) \right]^+,$$

$$\mathbf{H}^* \mathbf{H} = \mathbf{U} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_t) \mathbf{U}^*, \quad \sum_{i=1}^t \lambda_i > 0 \quad \left(\nu - \frac{\sigma^2}{\lambda_i}\right)^+ = L.$$

MIMO-Kanal (normalverteiltes \mathbf{H})

$$C = \max_{\text{E}(\mathbf{X}^* \mathbf{X}) \leq L} \text{I}(\mathbf{X}; (\mathbf{Y}, \mathbf{H})) = \text{E}[\log \det(\mathbf{I}_r + \frac{L}{t\sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^*)]$$