

13. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

05.02.2010

Aufgabe 1. Es seien $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_m\}$ ein Quellalphabet, $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_d\}$ ein Kodealphabet und g ein eindeutig dekodierbarer Kode. Für $j = 1, \dots, m$ bezeichne $P(X = x_j) = p_j$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Quellbuchstabens x_j und n_j bezeichne die Länge des Kodeworts $g(x_j)$. Zeigen Sie (z.B. mit der Ungleichung von McMillan), dass für die erwartete Kodewortlänge $\bar{n}(g)$ gilt:

$$\bar{n}(g) = \frac{H(X)}{\log d} \Leftrightarrow p_j = d^{-n_j} \text{ für alle } j = 1, \dots, m \text{ mit } p_j > 0.$$

Aufgabe 2. Gegeben sei ein gedächtnisloser binärer symmetrischer Kanal mit Ein- und Ausgabealphabet $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$. Die Menge der Eingabewörter sei $\mathcal{C} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$. Dabei trete $(0, 0, 0)$ mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ sowie $(1, 1, 1)$ mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ auf. Ferner sei $\epsilon = 1/3$.

- Welche Ausgabewörter sind bei der Übertragung im Kanal möglich und wie groß sind deren Auftrittswahrscheinlichkeiten?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_K für die fehlerfreie Übertragung eines Eingabeworts?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p_E dafür, ein Element aus \mathcal{C} zu empfangen, das nicht gesendet wurde?
- Geben Sie eine ML-Dekodierung $h_{ML} : \mathcal{Y}^3 \rightarrow \mathcal{C}$ an.
- Geben Sie eine ME-Dekodierung $h_{ME} : \mathcal{Y}^3 \rightarrow \mathcal{C}$ an.

Aufgabe 3. Gegeben seien ein binärer symmetrischer Kanal mit Ein- und Ausgabealphabet $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0, 1\}$ und Fehlerwahrscheinlichkeit $\epsilon = 0.1$. Zur Übertragung wird ein (M, N) -Kode mit M Kodewörtern der Länge N angewendet.

- Bestimmen Sie die Kapazität des Kanals.
- Gibt es eine Folge von $(2^{0.6N}, N)$ -Kodes, $N \in \mathbb{N}$, welche die Annahme des Shannonschen Fundamentalsatzes erfüllt?
- Die Quelle übermittle R Symbole pro Zeiteinheit und habe 2^K Kodewörter der Länge N . Geben Sie eine Bedingung für N (in Abhängigkeit von R und K) an, so dass die Annahme des Shannonschen Fundamentalsatzes erfüllt wird.