7. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

28.11.2013

Aufgabe 1. Für $\tau > 0$ seien $X \sim \mathrm{N}(0, \tau^2)$ und $Y \sim \mathrm{N}(0, \tau^2)$ zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Für $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ gilt, dass R *Rayleigh*-verteilt ist mit Parameter τ^2, geschrieben $R \sim \mathrm{Ray}(\tau^2)$. Die Dichte von R lautet

$$f_R(r) = \frac{r}{\tau^2} e^{-\frac{r^2}{2\tau^2}} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(r).$$

a) Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

i) $\mathrm{E}(R) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\tau$.

Hinweis: Für

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1} e^{-x}\, \mathrm{d}x, \quad y > 0,$$

gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(y+1) = y \cdot \Gamma(y)$.

ii) $\mathrm{Var}(R) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tau^2$.

iii) $R^2 \sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2\tau^2}\right)$.

iv) Für $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ sei $Z = \alpha(X + iY)$. Dann gilt $|Z|^2 \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{2\tau^2|\alpha|^2})$.

v) Es gelte $|\alpha| = 1$. Zeigen Sie, dass $X + iY$ und Z identisch verteilt sind.

b) Für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, modelliere $Z_j = \alpha_j(X + iY)$, $j = 1, 2$, das Empfangssymbol bei Übertragung des Symbols α_j über einen Mobilfunkkanal ohne Sichtverbindung. Wir nehmen an dass beide Symbole mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ übertragen werden. Finden Sie zwei Werte für α_1 und α_2 sowie ein Dekodierverfahren, mit dem das jeweilige Übertragungssymbol fehlerfrei dekodiert werden kann.