11. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

09.01.2014

Aufgabe 1. Ein zeitkontinuierliches LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ wird mit dem Eingangssignal $x(t)$ beaufschlagt:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

a) Berechnen und skizzieren Sie das Ausgangssignal $y(t)$ für den Fall:

$$x(t) = \begin{cases} t & : \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

b) Wie lautet die Impulsantwort $h(t)$, wenn das Eingangssignal $x(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$ über folgende Gleichung zusammenhängen:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} x(u-2) du$$

Aufgabe 2. Die Fouriertransfomierte $H(f)$ der Impulsantwort $h(t)$ eines LTI-Systems sei gegeben durch

$$H(f) = \frac{1}{1 + i\sqrt{2}f - f^2}.$$

Beim Eingangssignal handele es sich um weißes Rauschen $\{W(t)\}$ mit der Autokorrelationsfunktion $R_{WW}(t) = \delta(t)$. Das Ausgangssignal sei $N(t) = (h * W)(t)$.

a) Berechnen und skizzieren Sie die spektralen Leistungsdichten $S_{WW}(f)$ und $S_{NN}(f)$.

b) Berechnen Sie die mittlere Leistung des Ausgangssignals.

Hinweis: Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} \, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, um die Allgemeingültigkeit einer Aussage zu widerlegen.

a) Es seien $X(t)$ und $Y(t)$ reelle, unkorrelierte Gaußprozesse. Dann ist auch

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

ein Gaußprozess.

b) Es sei $X(t)$ ein schwach stationärer stochastischer Prozess. Dann ist auch

$$Y(t) = X(t) - X(-t)$$

ein schwach stationärer stochastischer Prozess.

c) Es sei $X(t) = A\cos(\omega t)$ mit $A \sim \mathrm{N}(0,1)$, $\omega > 0$ fest. Dann ist $X(t)$ ein schwach stationärer Prozess.

Bem.: Zwei stochastische Prozesse $X(t)$ und $Y(t)$ heißen *unkorreliert*, wenn gilt

$$R_{XY}(t_1, t_2) := E(X(t_1)Y(t_2)) = E(X(t_1))E(Y(t_2)) \text{ für alle } t_1, t_2.$$