Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 4

Montag, 16. November 2015

Aufgabe 1. Zwei Freunde A und B verabreden, sich abends am Markt zu treffen. A kommt zu einem zufälligen Zeitpunkt zwischen 21 Uhr und 22 Uhr an und wartet 15 Minuten auf B. B kommt zwischen 20:30 Uhr und 22:30 Uhr an und wartet 30 Minuten. Beide Ankunftszeiten können als gleichverteilt in den oben angegebenen Intervallen und als stochastisch unabhängig angenommen werden.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit begegnen sich die beiden?

Aufgabe 2.

a) Die Kovarianzmatrix ist definiert als $\boldsymbol{C} = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei alle $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ Zufallsvariablen sind. Geben Sie diese Matrix für den n-dimensionalen Fall explizit an. Verwenden sie dafür die Beziehungen aus Proposition 2.3.9d) aus dem Skript. Ist die Kovarianzmatrix symmetrisch?

b) Ein zweidimensional normalverteilter Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ werde durch folgende Dichte beschrieben

$$f_{\boldsymbol{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{2}{3}(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)\right) .$$

Berechnen Sie den Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ sowie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$ des Zufallsvektors $\boldsymbol{X}$. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Matrix $\boldsymbol{C}$ invertierbar ist und $\det(\boldsymbol{C}) > 0$ gilt.

c) Wenn ein Zufallsvektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ zweidimensional normalverteilt ist, dann folgt daraus jeweils die eindimensionale Normalverteilung der Zufallsvariablen X_1 und X_2. Geben Sie auf Basis dieser Beziehung die Randverteilungsdichten $f_{X_1}(x_1)$ und $f_{X_2}(x_2)$ an und nehmen Sie an, dass $\boldsymbol{X}$ so verteilt ist wie im vorhergehenden Aufgabenteil angegeben.

d) Lässt sich umgekehrt aus der Kenntnis der eindimensionalen Randverteilungsdichten auf die n-dimensionale gemeinsame Verteilungsdichte schließen?

Aufgabe 3.

a) Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen. Der Träger von X ist $T_X = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie unter Anwendung des Transformationssatzes die Dichte von $Y = aX + b$, wobei a und b zwei reelle Konstanten sind.

b) Es sei nun $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, d.h. X ist standardnormalverteilt. Wie lautet die Transformation, so dass $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt?

c) Es sei erneut $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Bestimmen Sie nun die Dichte der Zufallsvariablen $Z = e^X$. Wie lautet der Träger von Z?