Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 12

Montag, 25. Januar 2016

Aufgabe 1. Ein PF-Kode g^* mit den Wortlängen $n_1^*, \ldots, n_m^*$ heißt *optimal*, wenn

$$\bar{n}(g^*) = \sum_{i=1}^{m} p_i n_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} p_i n_i = \bar{n}(g)$$

für alle PF-Kodes g mit Wortlängen $n_1, \ldots, n_m$ gilt. Zeigen Sie, dass für einen optimalen Kode g^* folgendes gilt:

$$p_i > p_j \Rightarrow n_i^* \leq n_j^*.$$

Aufgabe 2. Betrachten Sie ein Alphabet $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ mit zugehöriger Verteilung $\boldsymbol{p} = (0.75, 0.25)$. Es sei $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$ ein Kodealphabet.

a) Bestimmen Sie einen optimalen Blockkode der Länge $N = 3$.

b) Bestimmen Sie die erwartete Kodewortlänge pro Quellbuchstabe und vergleichen Sie diese mit $\mathrm{H}(X)$ und der erwarteten Kodewortlänge bei buchstabenweiser Kodierung.

Hinweis: Ein Algorithmus zur Konstruktion optimaler PF-Kodes ist das *Huffman-Verfahren*. In diesem Verfahren wird ein Binärbaum erzeugt, wobei die Blätter mit den Quellbuchstaben belegt werden. Der Weg von der Wurzel zu den Blättern legt das Kodewort für den Buchstaben fest, das heißt „links“ entspricht einer Null und „rechts“ einer Eins im Kodewort. Die Konstruktionsvorschrift lautet folgendermaßen:

1. Liste die Symbole des Quellalphabets mit fallenden Wahrscheinlichkeiten auf und interpretiere die Symbole im Folgenden als Bäume.

2. Fasse die Bäume mit den geringsten Wahrscheinlichkeiten zu einem neuen Baum zusammen, d.h. an einen Knoten wird links bzw. rechts jeweils einer dieser Bäume gehangen und der Knoten (der neue Baum) wird mit der Summe der Wahrscheinlichkeiten markiert. Die ursprünglichen Bäume werden aus der Liste entfernt und der resultierende Baum wird gemäß seiner Wahrscheinlichkeit in die bisherige Liste einsortiert.

3. Wiederhole 2. bis nur noch ein Binärbaum übrig ist. Dieser repräsentiert den Huffmann-Kode.

Aufgabe 3. Es seien $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ ein Quellalphabet, $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_d\}$ ein Kodealphabet und $g : \mathcal{X} \to \cup_{l=1}^{\infty} \mathcal{Y}^l$ ein eindeutig dekodierbarer Kode. Für $j = 1, \ldots, m$ bezeichne $P(X = x_j) = p_j$ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Quellbuchstabens x_j und n_j bezeichne die Länge des Kodeworts $g(x_j)$. Zeigen Sie, dass für die erwartete Kodewortlänge $\bar{n}(g)$ gilt:

$$\bar{n}(g) = \frac{\mathrm{H}(X)}{\log d} \quad \Leftrightarrow \quad p_j = d^{-n_j} \text{ für alle } j = 1, \ldots, m \text{ mit } p_j > 0.$$