Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Zusatzübung

Donnerstag, 24. März 2016

Aufgabe 1. Die Gesamtaufgabe besteht aus **zwei** Teilen, die **unabhängig** voneinander gelöst werden können.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

Teil I

Es sei X eine absolut-stetige Zufallsvariable mit Dichte $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.

a) Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $Y = aX$ für $a > 0$ in Abhängigkeit von f_X an.

b) Berechnen Sie die differentielle Entropie von Y in Abhängigkeit von $\mathrm{H}(X)$.

c) Welche Verteilung ergibt sich für $a \to 0$? Wie lautet in diesem Falle die Entropie von Y?

d) Für $\lambda > 1$ sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{N}(0, n\lambda^{-n})$. Bestimmen Sie die differentielle Entropie von

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{n} .$$

Hinweis: Für $|\alpha| < 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\alpha^n = -\ln(1-\alpha) .$$

Teil II

Es seien X und Y zwei geometrisch verteilte Zufallsvariablen mit Parametern $0 < p < 1$ und $0 < q < 1$ und Träger $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die zugehörigen Zähldichten für $n = 0, 1, 2, \dots$ lauten

$$P(X = n) = p(1-p)^n \quad \text{und} \quad P(Y = n) = q(1-q)^n .$$

e) Berechnen Sie die Kullback-Leibler-Distanz $\mathrm{D}(X \parallel Y)$ zwischen X und Y.

Hinweis: Für $0 < \alpha \leq 1$ gilt

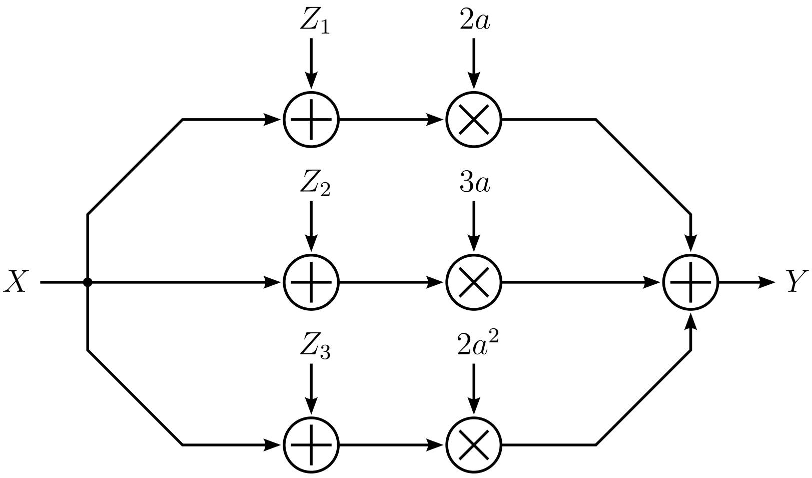
$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} .$$

Aufgabe 2. Die Gesamtaufgabe besteht aus **zwei** Teilen, die **unabhängig** voneinander gelöst werden können.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

Teil I

Gegeben sei der unten abgebildete Kanal: Der Kanaleingang wird mit der mittelwertfreien



Zufallsvariablen X beschrieben, der Kanalausgang mit der Zufallsvariablen Y. Die additiven Rauschterme sind wie folgt verteilt:

$$Z_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)\,,\ Z_2 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)\,,\ Z_3 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_3^2)\,.$$

Der Kanaleingang und die Rauschterme sind gemeinsam stochastisch unabhängig. Für den Parameter a gilt $a > 0$. Des Weiteren besteht mit $L > 0$ eine Leistungsbeschränkung des Eingangs gemäß $\mathrm{E}(X^2) \leq L$.

a) Bestimmen Sie die Kapazität des Kanals in Abhängigkeit der Parameter $a, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2$ und L.

Teil II

Gehen Sie nun davon aus, dass die Kapazität des obigen Kanals

$$C = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{L'}{5a^4 + 15a^2} \right)$$

lautet, wobei $L' > 0$. Es soll im Folgenden der optimale Parameter a bestimmt werden, sodass die Kapazität maximal wird. Außerdem bestehen folgende Nebenbedingungen: $1 \leq a \leq 4$ und $2a^2 + 3a \leq 14$.

b) Stellen Sie ein Optimierungsproblem auf, das durch Minimierung einer polynomiellen Zielfunktion das obige Problem löst.

c) Zeigen Sie, dass die Zielfunktion konvex ist.

d) Wie lautet der optimale Wert für a (Begründung erforderlich).

Aufgabe 3. Die Gesamtaufgabe besteht aus **zwei** Teilen, die **unabhängig** voneinander gelöst werden können.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

Teil I

Es werde ein paralleler Gaußkanal mit mittelwertfreier Kanaleingabe $\boldsymbol{X}$ und dem von der Eingabe stochastisch unabhängigen Störterm $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{N}_3(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}})$ gemäß

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$$

betrachtet. Dabei bezeichnet $\boldsymbol{Y}$ die Kanalausgabe am Empfänger. Die Kanaleingabe unterliege der Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')) \leq 6$. Des Weiteren gelte für die Kovarianzmatrix des Rauschterms

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals.

b) Geben Sie die kapazitätserreichende Eingabeverteilung von $\boldsymbol{X}$ an.

Teil II

Nun werde ein MIMO-System mit je zwei Sende- und Empfangsantennen gemäß dem Modell $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$ betrachtet, wobei $\boldsymbol{H} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_2)$ mit $\sigma^2 = 4$ gelten. Des Weiteren liege eine Leistungsbeschränkung der Kanaleingabe von $\mathrm{E}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) \leq L = \frac{6}{5}$ vor. Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{H}^*\boldsymbol{H}$ lauten $\gamma_1 = 5$ und $\gamma_2 = 1$.

Das Waterfilling-Niveau zur Bestimmung der Kapazität des obigen Kanals wurde nun gemäß

$$\sum_{i=1}^{2} \left(\nu - \frac{\sigma^2}{\gamma_i} \right) = L \tag{1}$$

zu $\nu = 3$ bestimmt.

c) Ist $\nu = 3$ ein zulässiger Wert zur Bestimmung der Kapazität des Kanals? Falls nein, wie lautet der optimale Wert?

d) Geben Sie eine anschauliche Interpretation für das Vorgehen an, falls der direkte Ansatz aus Gleichung (1) im ersten Schritt nicht zu einer Lösung führt. Worin besteht der fundamentale Unterschied zum Vorgehen beim parallelen Gaußkanal?

e) Wie lautet die Kapazität des Kanals?

Aufgabe 4. Die Gesamtaufgabe besteht aus **zwei** Teilen, die **unabhängig** voneinander gelöst werden können.

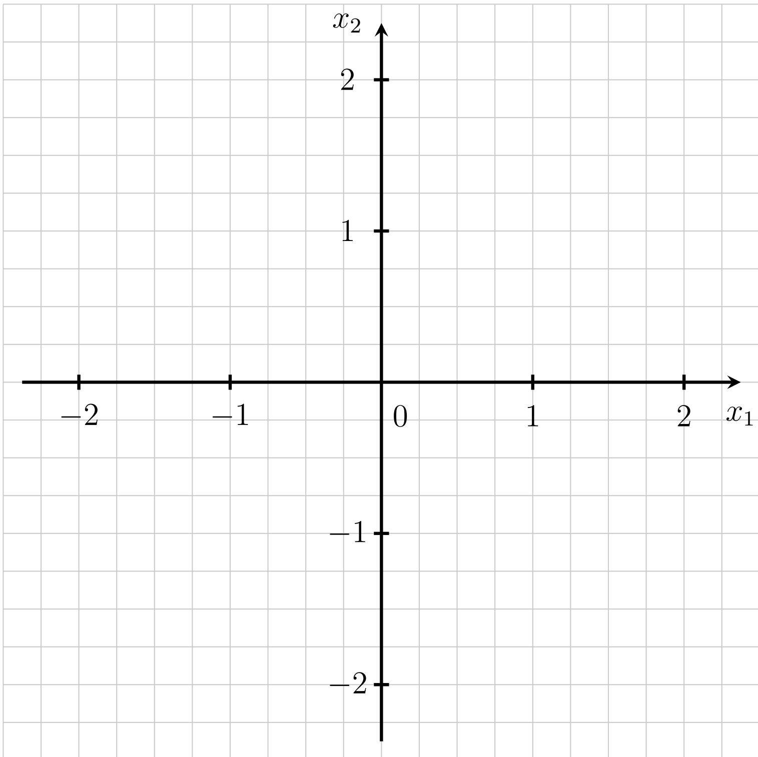
Teil I

Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2}. \quad & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.d.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\,, \\ & 0 \leq x_1 \leq 1\,, \\ & 0 \leq x_2 \leq 1\,. \end{aligned}$$

Dabei ist $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie die zulässige Menge des Optimierungsproblems und lösen Sie das Problem grafisch. Geben Sie die Lösung und den optimalen Wert des Problems an.



Teil II

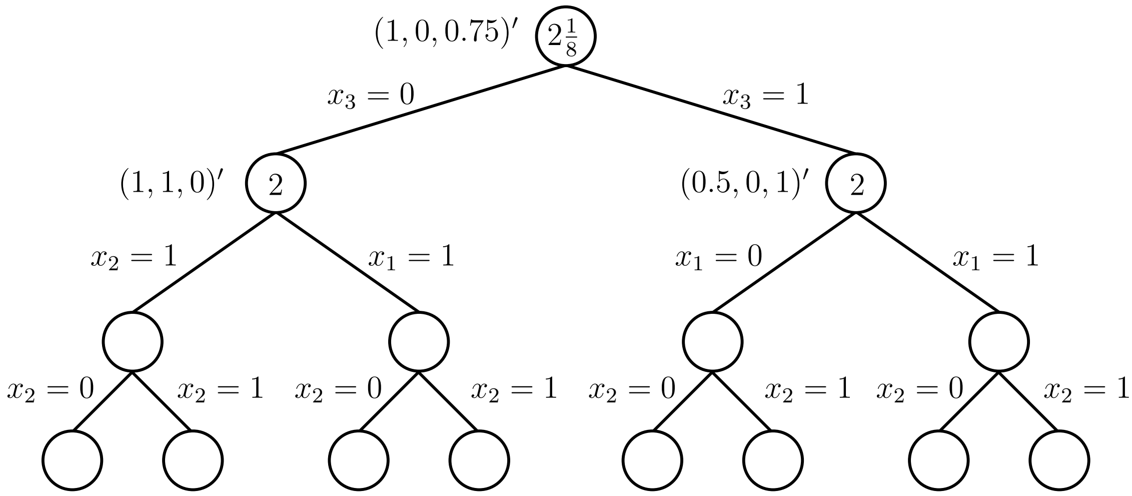
Das obige Optimierungsproblem trat als Unterproblem während der Lösung eines ILP auf, welches mit dem Branch-and-Bound-Algorithmus gelöst wurde. Das ursprüngliche ILP lautet:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, x_3}. \quad & \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} \\ \text{s.d.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\,, \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, 3\,. \end{aligned}$$

wobei

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}.$$

Betrachten Sie den teilweise ausgefüllten Baum, der einen Lösungsprozess des Branch-and-Bound-Algorithmus für das obige ILP darstellt.



b) Wie lautet das erste Optimierungsproblem am Wurzelknoten des Baums, welches der Branch-and-Bound-Algorithmus löst?

c) Vervollständigen Sie den Lösungsbaum mit den optimalen Werten und Lösungen der Unterprobleme. Falls Zweige des Baumes abgeschnitten werden, markieren Sie dies (die darunter folgenden Knoten müssen nicht ausgefüllt werden). Dokumentieren Sie den Lösungsweg der auftretenden Unterprobleme.

d) Wie lauten die Lösung und der optimale Wert des ILPs?