6. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Fabian Altenbach, Michael Reyer

17.06.2010

Aufgabe 1. Gegeben sei ein reeller paralleler Gauß-Kanal

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} .$$

Das Eingangssignal $\mathbf{X}$ unterliegt der Leistungsbeschränkung $\mathrm{tr}(\mathbf{\Sigma_X}) \leq P$. Für die Kovarianzmatrix des normalverteilten, mittelwertfreien Störterms $\mathbf{Z}$ gelte weiterhin

$$\mathbf{\Sigma_Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und erklären Sie das Ergebnis.

b) Es soll auf der Empfangsseite des Kanals ein Vektor $\mathbf{b}$ derart konstruiert werden, so dass die Komponente X_1 fehlerfrei übertragen wird. Finden Sie hierfür eine geeignete lineare Transformation

$$\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X} + \mathbf{Z}) \ , \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Warum ist eine fehlerfreie Übertragung möglich?

Hinweis: Berechnen Sie $\mathbf{b}$ so, dass die Varianz von $W = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}$ gleich Null ist.

Aufgabe 2. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ zwei hermitsche positiv definite $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbf{A} > \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|.$$

($\mathbf{A} > \mathbf{B}$ ist eine Kurzschreibweise für “die Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ ist positiv definit”).

Bitte wenden!

Aufgabe 3. Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ eine positiv definite hermitsche Matrix. Zeigen Sie die Gültigkeit der Hadamard Ungleichung

$$|\mathbf{A}| \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Hinweis: Definieren Sie einen Zufallsvektor $\mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{A})$ und verwenden Sie die Eigenschaft $\mathrm{H}(Y|Z) \leq \mathrm{H}(Y)$ der differentiellen Entropie und die Kettenregel

$$\mathrm{H}(Y_1, \ldots, Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{H}(Y_i|Y_1, \ldots, Y_{i-1}).$$