

## 8. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

09.06.2011

**Aufgabe 1.** Gegeben sei folgender MIMO-Kanal:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z}.$$

Die Kanalmatrix  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  sei fest. Des Weiteren sei das additive Rauschen  $\mathbf{Z}$  normalverteilt mit  $E[\mathbf{Z}] = \mathbf{0}$  und  $E[\mathbf{Z}\mathbf{Z}^*] = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}}$ . Hier ist  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}}$  nicht notwendigerweise diagonal, d.h., das additive Rauschen auf den verschiedenen Empfangsantennen ist korreliert. Außerdem nehmen wir an, dass  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{Z}}$  positiv definit ist.

Weiterhin gelte folgende Leistungsbeschränkung:

$$E[\mathbf{X}^* \mathbf{X}] \leq L.$$

Berechnen Sie die Kapazität des Kanals und bestimmen Sie die kapazitätserreichende Eingangsverteilung.

**Aufgabe 2.** Gegeben sei folgender MIMO-Fadingkanal:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{Z}.$$

Die Einträge der Kanalmatrix seien i.i.d. normalverteilt mit  $E[h_{kl}] = 0$  und  $E[|h_{kl}|^2] = \sigma_h^2$ . Die Zufallsvariablen  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{Z}$  sind gemeinsam stochastisch unabhängig.

- a) Zeigen Sie, dass die Transinformation im Fall, dass der Empfänger die Kanalrealisierung kennt größer ist, als wenn der Empfänger die Kanalrealisierung nicht kennt. Der Sender soll in beiden Fällen nur die Kanalstatistik kennen. D.h., zeigen Sie, dass folgende Ungleichung gilt:

$$I(\mathbf{Y}; \mathbf{X} | \mathbf{H}) \geq I(\mathbf{Y}; \mathbf{X}). \quad (1)$$

- b) Ungleichung (1) ist ein Beispiel für den Fall, dass eine Bedingung auf eine Zufallsvariable eine Transinformation vergrößern kann. Dies gilt jedoch nicht im Allgemeinen. Geben sie ein Beispiel für drei Zufallsvariablen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  so, dass

$$I(\mathbf{A}; \mathbf{B} | \mathbf{C}) \leq I(\mathbf{A}; \mathbf{B}).$$

**Aufgabe 3.** Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit einer Empfangsantenne, drei Sendeantennen und Leistungsbeschränkung  $L = 20$ . Für die additive Störung gelte  $Z \sim \text{SCN}(0, 42)$ . Die Pfadgewinne seien  $h_{11} = 5$ ,  $h_{12} = 1$  und  $h_{13} = 4$ .

Berechnen Sie die Kapazität und die kapazitätserreichende Eingangsverteilung des Kanals.