6. Übung zu Kommunikationsnetze II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Gernot Fabeck, Michael Reyer

Abgabe am 4.6.2007 in der Vorlesung/Übung

Aufgabe 13. Es sei $\{N_t\}_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für $0 < s < t$ und $i \leq j$ mit $i, j \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$P(N_s = i | N_t = j) = \binom{j}{i} \left(\frac{s}{t}\right)^i \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{j-i}.$$

Aufgabe 14. In einem Netzwerk sind zwei Router über zwei verschiedene Leitungen verbunden. Das Routing über die beiden Leitungen kann nach zwei verschiedenen Strategien erfolgen:

1. Jedes Paket wird zufällig mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.5$ auf eine der beiden Leitungen gegeben.

2. Die ersten n Pakete werden über Leitung Eins geleitet. Die nächsten n Pakete werden über Leitung Zwei geleitet. Dann wird wieder über Leitung Eins übertragen, usw.

Die Pakete kommen am ersten Router gemäß eines Poisson-Prozesses mit Intensität $\lambda > 0$ an. Geben Sie für beide Routingverfahren die Verteilung der Zwischenankunftszeiten an für Pakete, die jeweils über Leitung Eins bzw. Leitung Zwei am zweiten Router ankommen. Handelt es sich dabei um Poisson-Prozesse?

Aufgabe 15. Das ALOHA-Protokoll wurde 1971 für das ALOHAnet als einfaches Protokoll zur Steuerung des Zugriffs auf ein gemeinsames Übertragungsmedium entwickelt und bildete später die Grundlage für das Ethernet-Protokoll.
Beim reinen ALOHA kann jeder Teilnehmer zu einem beliebigen Zeitpunkt ein Datenpaket konstanter Länge verschicken. Überlappt sich die Übertragung von Paketen unterschiedlicher Teilnehmer, so kollidieren diese Pakete und zerstren sich. Nach einer zufälligen Wartezeit können Pakete erneut versendet werden.
Betrachten Sie ein Netz mit $k \geq 1$ Stationen und nehmen Sie an, dass jede Station ihre Pakete gemäß eines Poisson-Prozesses mit Parameter $\lambda > 0$ versendet. Die Zeit zwischen der Übertragung zweier Pakete sei also Exp(λ)-verteilt, unabhängig davon, ob das vorhergehende Paket zerstört wurde oder nicht. (Im diesem Modell wird zugelassen, dass eine Station ihr eigenes Paket zerstören kann.) Jedes Paket sei genau eine Zeiteinheit lang.

a) Geben Sie den Parameter λ_{tot} des Poisson-Prozesses N_t an, der die Anzahl sämtlicher versendeter Pakete beschreibt.

b) Die Zufallsvariable $Q_n \sim \mathrm{Bin}(1,p)$, $n \in \mathbb{N}$, habe den Wert Eins, falls das n-te Paket erfolgreich übertragen wird, und den Wert Null, falls es zerstört wird, da es mit dem $(n-1)$-ten oder dem $(n+1)$-ten Paket überlappt. Bestimmen Sie p als Funktion von λ_{tot}. Gehen Sie davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Übertragung des 0-ten Pakets beginnt.

c) Berechnen Sie die erwartete Anzahl nicht zerstörter Pakete bis zum Zeitpunkt $t > 0$ einschließlich des nächsten, also $\mathrm{E}(\sum_{n=1}^{N_t+1} Q_n)$, als Funktion von λ_{tot}. Zählen Sie dabei das 0-te Paket nicht mit und nutzen Sie den unten angegebenen Hinweis. Bestimmen Sie weiterhin den Durchsatz des Kanals, also die erwartete Anzahl nicht zerstörter Pakete pro Zeiteinheit

$$d_{\mathrm{ALOHA}}(\lambda_{tot}) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \mathrm{E}(\text{Anzahl nicht zerstörter Pakete bis zum Zeitpunkt } t)$$

Wie groß ist der maximale Durchsatz und für welchen Wert von λ wird er angenommen?

d) Als Alternative zu ALOHA wurde slotted ALOHA vorgeschlagen. Dabei darf die Übertragung eines Pakets nur zu vorgegebenen Zeitpunkten $t = 0, 1, 2, 3, ...$ beginnen. Welcher Durchsatz ergibt sich für slotted ALOHA, wenn die Übertragungswahrscheinlichkeit q für jede Station in jedem Slot so gewählt wird, dass die erwartete Anzahl gesendeter Pakete pro Station und pro Slot dem Wert für ALOHA entspricht, also $q = \lambda_{tot}/k$, wobei $\lambda_{tot}/k < 1$. Geben Sie den Durchsatz $d_{\mathrm{SALOHA}}(\lambda_{tot})$ von slotted ALOHA für festes k und im Grenzwert $k \to \infty$ an.

e) Vergleichen Sie den Durchsatz von ALOHA mit dem von slotted ALOHA im Grenzwert $k \to \infty$.

Hinweis: Benutzen Sie, dass für die oben eingeführten Größen gilt

$$\mathrm{E}(\sum_{n=1}^{N_t+1} Q_n) = \mathrm{E}(N_t + 1) \cdot \mathrm{E}(Q_1).$$