9. Übung zu Kommunikationsnetze: Analyse und Leistungsbewertung

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz

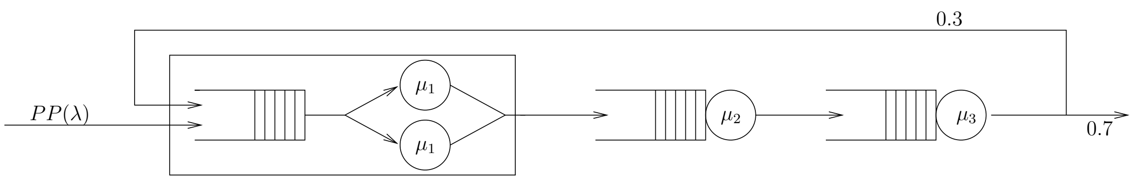
27.6.2011

Aufgabe 1. In einer Probe entstehen Atome eines bestimmten Nuklids durch den Zerfall eines Vorgängernuklids oder einen anderen kernphysikalischen Prozess. Wir nehmen an, dass diese Neubildungen durch einen Poisson-Prozess mit konstanter Rate λ beschrieben werden können, was beispielsweise beim Zerfall eines Vorgängernuklids mit langer Halbwertszeit plausibel ist. Da das neugebildete Nuklid auch radioaktiv ist, zerfällt jedes neugebildete Atom unabhängig von den anderen nach einer exponentialverteilten Zeit. Dabei beschreibt die *Halbwertszeit* $t_{\frac{1}{2}}$ diejenige Zeitspanne, nach der im Mittel die Hälfte der anfangs vorhandenen Atome zerfallen ist. Sie ist für alle Atome eines Nuklids identisch.

a) Durch welches Markovsche Bediensystem kann dieser Vorgang modelliert werden? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$ und der Bedienrate μ?

b) In einer Gesteinsprobe, die Uranerz enthält, entstehen pro Sekunde im Mittel 5 neue Atome des Radonisotops ^{219}Rn. Diese zerfallen selber mit einer Halbwertszeit von 3.96 Sekunden. Wie ist die Anzahl der ^{219}Rn-Atome in der Probe verteilt? Wieviele Atome sind im Mittel in der Probe vorhanden? Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich im stationären Zustand überhaupt kein ^{219}Rn-Atom in der Probe?

Aufgabe 2. Betrachten Sie das folgende Jackson-Netzwerk.



Die erste Station besteht aus zwei Servern, die jeweils exponentialverteile Bedienzeiten mit Parameter $\mu_1 > 0$ haben. Die Bedienintensitäten sind also $\mu_1(1) = \mu_1$ und $\mu_1(l) = 2\mu_1$ für $l \geq 2$. Weiter seien $\mu_2 > 0$ und $\mu_3 > 0$.

a) Wie lautet die Routingmatrix?

b) Bestimmen Sie den Zustandsraum.

c) Wann existiert eine stationäre Verteilung?

Nehmen Sie nun an, dass $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\mu_3 = 5$ und $\lambda = \frac{1}{3}$.

d) Wie lautet die stationäre Verteilung?

Aufgabe 3. Es sei $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), ..., X_J(t))$ der beschreibende Markoff-Prozess eines offenen Jackson-Netzes mit Fluss $\boldsymbol{\Lambda} = (\Lambda_1, ..., \Lambda_J)$ und Routingmatrix $\boldsymbol{R}$, wobei $r_{ii} = 0$ für alle $i = 1, ..., J$ gelte. Man fasse die Stationen K bis J zu einer Station K auf folgende Weise zusammen:

Es sei $\widetilde{\boldsymbol{X}}(t) = (\widetilde{X}_1(t), ..., \widetilde{X}_K(t))$, $K < J$, der beschreibende Markoff-Prozess des offenen Jackson-Netzes mit K Stationen und die Matrix $\widetilde{\boldsymbol{R}} \in \mathbb{R}^{(K+1)\times(K+1)}$ sei definiert durch:

$$\widetilde{r}_{ij} = \begin{cases} \frac{\sum_{k=K}^{J} \Lambda_k r_{kj}}{\sum_{k=K}^{J} \Lambda_k} & \text{für} \quad i = K, \quad j \in \{0, ..., K-1\} \\ \sum_{k=K}^{J} r_{ik} & \text{für} \quad i \in \{0, ..., K-1\}, \quad j = K \\ \frac{\sum_{k=K}^{J} \Lambda_k \sum_{j=K}^{J} r_{kj}}{\sum_{k=K}^{J} \Lambda_k} & \text{für} \quad i = j = K \\ r_{ij} & \text{für} \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass durch $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ ebenfalls eine Routingmatrix definiert wird und dass für den Fluss $\widetilde{\boldsymbol{\Lambda}} = (\widetilde{\Lambda}_1, ..., \widetilde{\Lambda}_K)$ von $\widetilde{\boldsymbol{X}}(t)$ gilt:

$$\begin{aligned} \widetilde{\Lambda}_i &= \Lambda_i \quad \text{für } i \in \{1, ..., K-1\}, \\ \widetilde{\Lambda}_K &= \sum_{k=K}^{J} \Lambda_k. \end{aligned}$$