Prof. Dr. Anke Schmeink, Michael Reyer, Christopher Schnelling

Übung 8

Montag, 13. Juni 2016

Aufgabe 1. In einem Büro gibt es drei Sachbearbeiter, die sich um die eintreffenden Kunden kümmern. Unter optimalen Bedingungen braucht ein Sachbearbeiter durchschnittlich zwölf Minuten, um einen Fall zu bearbeiten. Ist jedoch nur einer der drei Sachbearbeiter beschäftigt, so wird er durch die Gespräche seiner unbeschäftigten Kollegen abgelenkt und kann nur 80 % seiner normalen Leistung erbringen, er braucht dann also im Mittel 15 Minuten für jeden Kunden. Noch schlimmer ist es, wenn genau zwei Sachbearbeiter beschäftigt sind, dann werden sie durch ihren gelangweilten dritten Kollegen derart abgelenkt, dass sich ihre Arbeitsleistung auf 30 % reduziert. Sind hingegen alle drei Sachbearbeiter beschäftigt, dann arbeiten sie alle mit ihrer maximalen Leistung. Für die Kunden, von denen im Mittel zehn pro Stunde eintreffen, steht ein unendlich großer Wartebereich zur Verfügung. Ankommende oder wartende Kunden werden von einem freien Sachbearbeiter umgehend bedient. Nehmen Sie an, dass die Ankunft der Kunden einen Poisson-Prozess darstellt, und dass die Bearbeitungszeiten exponentialverteilt sind.

a) Wie ist die Anzahl der Kunden, die in einem Zeitraum von t Stunden eintreffen, verteilt? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem zufällig ausgewählten Zeitraum von einer halben Stunde Dauer überhaupt kein Kunde eintrifft?

b) Skizzieren Sie den Intensitätsgraphen dieses Systems.

c) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung des Geburts- und Todesprozesses. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich im stationären Zustand überhaupt keine Anforderung im System? Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle drei Sachbearbeiter beschäftigt?

d) Charakterisieren Sie die eingebettete Markov-Kette (EMK) durch ihren Übergangsgraphen. Ist die EMK periodisch oder aperiodisch? Geben Sie eine kurze Begründung Ihrer Antwort an.

e) Beobachtungen zeigen nun, dass sich das Kundenverhalten gegenüber dem oben beschriebenen System verändert hat. Es treffen nach wie vor im Mittel zehn Kunden pro Stunde ein, sie gehen aber mit fünfzigprozentiger Wahrscheinlichkeit direkt wieder, wenn bei ihrem Eintreffen kein Sachbearbeiter frei ist. Die Entscheidung, ob ein Kunde wieder geht, wird durch ein vom Ankunftsprozess unabhängiges Zufallsexperiment getroffen. Das Arbeitsverhalten der Sachbearbeiter sei dabei unverändert. Modellieren Sie dieses modifizierte System als Geburts- und Todesprozess. Geben Sie dazu die Ankunfts- und Bedienintensitäten des neuen Geburts- und Todesprozesses an.

Aufgabe 2.

Zeigen Sie, dass für die Berechnung der Erlang-Blockierwahrscheinlichkeit $\mathrm{B}(s,\rho)$ eines $M/M/s/0$-Systems folgende Rekursionsformel gilt:

$$\mathrm{B}(s,\rho) = \frac{\rho \mathrm{B}(s-1,\rho)}{s + \rho \mathrm{B}(s-1,\rho)}, \quad s \in \mathbb{N}.$$