5. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Meik Dörpinghaus, Daniel Bielefeld

19.11.2010

Aufgabe 1. Gegeben sei die gemeinsame Zähldichte $f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$ von vier verschiedenen Signalpunkten (siehe Figure 1). Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Wertes ist dabei für alle Punkte gleich.

a) Die gemeinsame Zähldichte ist in der unten stehenden Tabelle angegeben. Vervollständigen Sie diese Tabelle, indem Sie in der entsprechenden Spalte bzw. Zeile die dazugehörige Randdichte eintragen.

	$k=-1$	$k=0$	$k=+1$	$P(X=l)$
$l=-1$	0	1/4	0	
$l=0$	1/4	0	1/4	
$l=+1$	0	1/4	0	
$P(Y=k)$				

Hinweis: Für die Randdichte von X gilt: $P(X = l) = \sum_{y \in T_Y} P(X = l, Y = y)$, wobei T_Y der diskrete Träger von Y ist.

b) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y unkorreliert sind.

Hinweis: Es gilt

$$\mathrm{E}(XY) = \sum_{k=-1}^{1} \sum_{l=-1}^{1} kl P(X = k, Y = l)\,.$$

c) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

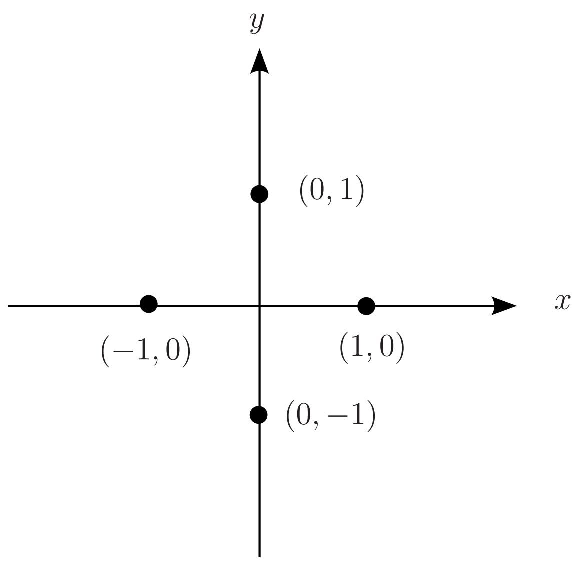

Figure 1: Signalkonstellationen

Aufgabe 2.

a) Es seien X und Y zwei absolut-stetige Zufallsvariablen. Geben Sie die Randdichten von $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ und die bedingten Dichten $f_{X|Y}(x|y)$ und $f_{Y|X}(y|x)$ auschließlich in Abhängigkeit von der gemeinsamen Dichte $f_{X,Y}(x,y)$ an.

b) Die gemeinsame Dichte lautet

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2\exp(-(x+y)) & 0 \leq y \leq x\,,\ x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die zugehörige bedingte Dichte $f_{Y|X}(y|x)$.

Aufgabe 3. Die Zeitdauer x bis zum Ausfall einer technischen Komponente wird durch eine exponential-verteilte Zufallsvariable X beschrieben. Der Erwartungswert $1/\lambda_X$ gibt dabei die mittlere Zeit bis zum Ausfall an.

Wenn die erste Komponente ausfällt, dann soll umgehend eine Ersatzkomponente den Betrieb übernehmen. Die Ersatzkomponente muss jedoch während der Lebensdauer der ersten Komponente unbenutzt verweilen, so dass sich die Ausfallwahrscheinlichkeit mit steigender Laufzeit x der ersten Komponente erhöht. Dieser Zusammenhang wird modelliert durch eine Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = \lambda_X(1 + \alpha x)$, wobei $0 < \alpha < 1$ gilt.

a) Interpretieren Sie den Parameter $1/\lambda$.

b) Die Zufallsvariable Y beschreibt die Nutzungsdauer der Ersatzkomponente. Geben Sie die Dichten von $f_X(x)$ und $f_{Y|X}(y|x)$ an. Berechnen Sie damit die Dichte von $f_Y(y)$.