

10. Übung zur Theoretischen Informationstechnik I

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Simon Görtzen, Christoph Schmitz, Ehsan Zandi

19.12.2013

Aufgabe 1. Es sei

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & \text{falls } t \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Impulsantwort eines LTI-Systems, $\alpha \in \mathbb{R}$. Das Eingangssignal des Systems sei ein schwach stationärer stochastischer Prozess $X(t)$ mit Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t)$. Berechnen Sie für den gefilterten Prozess

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u) du$$

die Autokorrelationsfunktion $R_{YY}(t)$ und das Leistungsdichtespektrum $S_{YY}(f)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass für das Leistungsdichtespektrum eines schwach stationären, reellwertigen stochastischen Prozesses $\{X(t)\}$ gilt:

$$S_{XX}(f) = S_{XX}(-f).$$

Aufgabe 3. $\{X(t) \mid t \in T\}$ sei ein reellwertiger, stationärer Gaussprozess mit Erwartungswertfunktion $\mu_X(t) \equiv 0$ und Autokorrelationsfunktion $R_{XX}(t)$. Zeigen Sie, dass der stochastische Prozess $Y(t) = X^2(t)$ die Autokorrelationsfunktion

$$R_{YY}(t) = R_{XX}^2(0) + 2R_{XX}^2(t)$$

besitzt.

Hinweis: Sind X_1, X_2 normalverteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0, so gilt

$$\mathbf{E}(X_1^2 X_2^2) = \mathbf{E}(X_1^2) \mathbf{E}(X_2^2) + 2\mathbf{E}^2(X_1 X_2).$$