

Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 7

Montag, 07. Dezember 2015

Aufgabe 1. Zeigen Sie die Faltungsstabilität von Normalverteilungen (vgl. Proposition 2.4.15 b) im Skript). Betrachten Sie dazu zwei stochastisch unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen $X_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$. Verwenden Sie zur Lösung der Aufgabe den Transformationssatz und die Fourier-Transformation.

- a) Nehmen Sie zunächst an, dass beide Erwartungswerte gleich Null sind.

Hinweis: Die Fourier-Transformation lautet $F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi\xi x} dx$.

Verwenden Sie, dass: $f(x) = e^{-\alpha x^2} \circ \bullet F(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{(\pi\xi)^2}{\alpha}}$ für $\alpha > 0$.

- b) Zeigen Sie nun die Verallgemeinerung für Erwartungswerte ungleich Null, indem Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil a) verwenden.

Hinweis: Der Verschiebungssatz der Fourier-Transformation lautet:

$f(x - \gamma) \circ \bullet e^{-i2\pi\xi\gamma} F(\xi)$.

Aufgabe 2. In der Forschungsabteilung eines großen Chipherstellers wird an einem neuen, vielversprechenden Herstellungsprozess gearbeitet. Durch einen zufällig auftretenden Fehler ist ein gewisser Prozentsatz der hergestellten Chips unbrauchbar. Die Fehler treten unabhängig voneinander auf und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers bei der Produktion betrage 0.1 %.

- a) Geben Sie die Folge von Zufallsvariablen U_n an, die das Verhältnis defekter zu untersuchter Chips angibt, nachdem n Proben untersucht wurden. Gehen Sie davon aus, dass die binäre Zufallsvariable X_i den Wert 1 besitzt, wenn der i -te Chip der Untersuchung defekt ist.
- b) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert von U_n mit der Fehlerwahrscheinlichkeit übereinstimmt.
- c) Eine Untersuchung soll bestätigen, dass die oben genannte Fehlerwahrscheinlichkeit der Wirklichkeit entspricht. Wie viele Proben müssen untersucht werden, damit die empirisch bestimmte Fehlerwahrscheinlichkeit mit einer Sicherheit von 99 % in dem Intervall [0.08 %, 0.12 %] liegt?

Hinweis: Verwenden Sie den zentralen Grenzwertsatz als Approximation.

- d) Gehen Sie davon aus, dass die ursprünglich genannte Fehlerwahrscheinlichkeit von 0.1 % ebenfalls auf einer Schätzung beruhe. Was folgern Sie aus dem Ergebnis von Aufgabenteil c)?