Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Übung 10

Montag, 11. Januar 2016

Aufgabe 1. Ein zeitkontinuierliches LTI-System mit Impulsantwort $h(t)$ wird mit dem Eingangssignal $x(t)$ beaufschlagt:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

a) Berechnen und skizzieren Sie das Ausgangssignal $y(t)$ für den Fall:

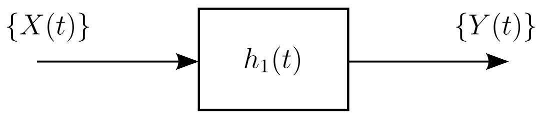
$$x(t) = \begin{cases} t & : \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

b) Wie lautet die Impulsantwort $h(t)$, wenn das Eingangssignal $x(t)$ und das Ausgangssignal $y(t)$ über folgende Gleichung zusammenhängen:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-u)} x(u-2) du$$

Aufgabe 2. Gegeben sei ein LTI-System mit schwach stationärem Eingangsprozess $\{X(t)\}$. Für $t_0 > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ sei die Impulsantwort des Systems gegeben durch

$$h_1(t) = \delta(t) + \delta(t - t_0)\,.$$



Hinweis: Die Fouriertransformierte einer Impulsantwort $h(t)$ wird mit $H(f)$ bezeichnet. Sie ist definiert als $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t$.

a) Berechnen Sie $H_1(f)$.

b) Geben Sie das Leistungsdichtespektrum $S_{YY}(f)$ vom Ausgangsprozess $\{Y(t)\}$ in Abhängigkeit von $S_{XX}(f)$ an.

c) Es sei $X(t)$ weißes Rauschen mit $R_{XX}(t) = \frac{N_0}{2}\delta(t)$.

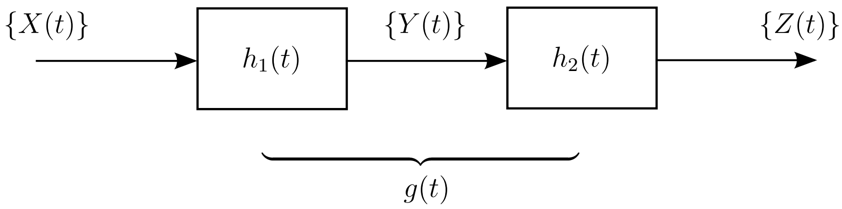
Berechnen Sie $S_{XX}(f)$ und $S_{YY}(f)$.

d) Für $\phi \sim \mathrm{R}(0,1)$ sei $X(t) = \sin(2\pi(t+\phi))$. Berechnen Sie $Y(t)$.

Es sei nun $\phi = 0$. Skizzieren Sie die Realisierung von $Y(t)$ für $t_0 = \frac{1}{2}$ und für $t_0 = 1$.

e) Dem obigen LTI-System wird ein zweites LTI-System nachgeschaltet. Das zweite System hat die Impulsantwort

$$h_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < t_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Es bezeichne $g(t)$ die Gesamtimpulsantwort beider Systeme. Berechnen Sie die Gesamtübertragungsfunktion $G(f)$.

Aufgabe 3. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antworten. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, um die Allgemeingültigkeit einer Aussage zu widerlegen.

a) Es seien $X(t)$ und $Y(t)$ reelle, unkorrelierte Gaußprozesse. Dann ist auch

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$

ein Gaußprozess.

b) Es sei $X(t)$ ein schwach stationärer stochastischer Prozess. Dann ist auch

$$Y(t) = X(t) - X(-t)$$

ein schwach stationärer stochastischer Prozess.

c) Es sei $X(t) = A\cos(\omega t)$ mit $A \sim \mathrm{N}(0,1)$, $\omega > 0$ fest. Dann ist $X(t)$ ein schwach stationärer Prozess.

Bem.: Zwei stochastische Prozesse $X(t)$ und $Y(t)$ heißen *unkorreliert*, wenn gilt

$$R_{XY}(t_1,t_2) := E(X(t_1)Y(t_2)) = E(X(t_1))E(Y(t_2)) \text{ für alle } t_1, t_2.$$