Zusatzübung zur Theoretischen Informationstechnik

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Daniel Bielefeld

13.08.2008, 9:30 Uhr, WSH 24 A 407

Aufgabe 1. An den zwei Antennen einer Basisstation werde ein reelles Signal in Form eines 2-dimensional normalverteilten Zufallsvektors $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)'$ empfangen. Die erwartete Empfangsleistung an den beiden Antennen sei jeweils gegeben durch $E(X_1^2) = 30$ und $E(X_2^2) = 10$. Ferner sei $E(X_1) = 2E(X_2) > 0$ und $E(X_1 \cdot X_2) = 0$. Die Entropie des Signals sei

$$H(\boldsymbol{X}) = \frac{\ln(20)}{2} + \ln(2\pi e).$$

Berechnen Sie den Erwartungswertvektor $\boldsymbol{\mu}$ und die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{C}$ von $\boldsymbol{X}$.

Aufgabe 2. Die stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen

$$X_1 \sim \mathrm{R}(0, a), \quad X_2 \sim \mathrm{R}(0, b), \quad X_3 \sim \mathrm{R}(0, c)$$

beschreiben die zufälligen Kantenlängen eines Quaders, $a, b, c > 0$. Betrachten Sie die Transformation

$$T : (0, a) \times (0, b) \times (0, c) \to \mathbb{R}^3, \quad T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 \cdot x_2, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)',$$

welche neben der Kantenlänge x_1 die Grundfläche $x_1 \cdot x_2$ und das Volumen $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ angibt.
Berechnen Sie die Dichte des Zufallsvektors $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)' = T(X_1, X_2, X_3)$.

Aufgabe 3. Die Impulsantwort $h(t)$ eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems sei gegeben durch

$$h(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 1 \\ 2, & 1 \le t \le 2 \\ 0, & 2 < t < \infty \end{cases}.$$

Am Eingang des LTI-Systems liege weißes Rauschen $\{W(t)\}$ mit der Autokorrelationsfunktion $R_{WW}(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$ vor. Berechnen Sie das Leistungsdichtespektrum des gefilterten Prozesses $\{N(t)\}$ und vereinfachen Sie dabei soweit wie möglich.

Hinweis:

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$$
$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)$$

Aufgabe 4. Es sei X eine diskrete gedächtnislose Quelle mit Alphabet $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ und Symbolwahrscheinlichkeiten $P(X = x_1) = 0.6$, $P(X = x_2) = 0.3$ und $P(X = x_3) = 0.1$. Das Kodealphabet sei $\mathcal{Y} = \{0, 1\}$.

a) Berechnen Sie die Entropie $H(X)$ der Quelle (bzgl. $\log_2$).

b) Bestimmen Sie mit dem Huffman-Verfahren einen optimalen Blockkode für Blöcke der Länge $N = 2$ über $\mathcal{X}$.

c) Berechnen Sie erwartete Kodewortlänge pro Quellsymbol.

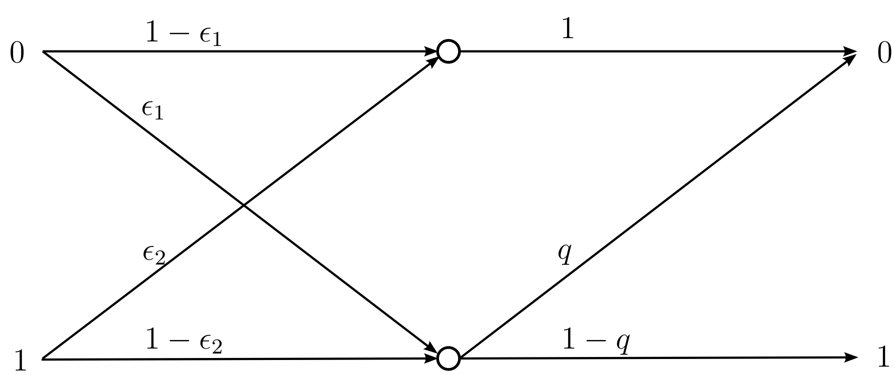
Aufgabe 5. Gegeben seien die drei diskreten Zufallsvariablen X, Y, Z mit jeweils endlichem Träger und der gemeinsamen Zähldichte

$$p(x, y, z) = p(x)p(y|x)p(z|y).$$

Zeigen Sie:

$$I(X, (Y, Z)) = I(X, Y)$$

Aufgabe 6. Gegeben sei folgender binärer Kanal:

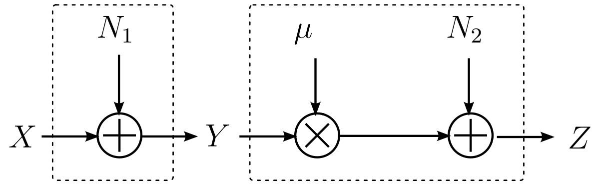


Die Parameter ϵ_1 und ϵ_2 liegen jeweils im Intervall $[0, 0.5]$ und es gelte ferner $\epsilon_1 > \epsilon_2$.

(a) Bestimmen Sie q so, dass der Gesamtkanal symmetrisch ist.

(b) Bestimmen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten des binären symmetrischen Kanals, der zum Gesamtkanal aus a) äquivalent ist, in Abhängigkeit von ϵ_1 und ϵ_2.

(c) Sei nun $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ und $q \in (0, 0.5)$. Mit der Wahrscheinlichkeit p_0 liege am Kanaleingang eine 0 an und mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 1 - p_0$ liege eine 1 an. Bestimmen Sie p_0 und p_1 in Abhängigkeit von q so, dass die Entropie am Kanalausgang maximal wird.



Aufgabe 7. Gegeben sei der folgende zweistufige Kanal:
Das Eingangssignal X der ersten Stufe unterliegt der Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}(X^2) \leq L$ und habe den Erwartungswer $\mathrm{E}(X) = 0$. Die additiven Rauschterme N_1 und N_2 sind normalverteilt mit $N_1 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_1^2)$ und $N_2 \sim \mathrm{N}(0, \sigma_2^2)$. Das Eingangssignal der zweiten Stufe ist das Ausgangssignal Y der ersten Stufe multipliziert mit dem Verstärkungsfaktor $\mu > 0$. Das Ausgangssignal der zweiten Stufe ist Z. Das Eingangssignal X und die beiden Rauschterme N_1 und N_2 seien gemeinsam stochastisch unabhängig.

(a) Berechnen Sie die Kapazität $C_{X,Y}$ der ersten Stufe in Abhängigkeit von σ_1 und L.

(b) Sei $\mu = 1$. Berechnen Sie die maximale Transinformation $I_{\max}(Y, Z)$ zwischen Y und Z in Abhängigkeit von σ_1, σ_2 und L.

(c) Sei μ wieder beliebig aber grösser als Null. Berechnen Sie die Kapazität $C_{X,Z}$ des gesamten Kanals, also die maximale Transinformation zwischen X und Z in Abhängigkeit von σ_1, σ_2, L und μ.

Aufgabe 8. Gegeben sei ein MIMO-Kanal mit vier Empfangsantennen und drei Sendeantennen. Die Leistungsbeschränkung betrage $L = 1$. Für die additive Störung gelte $\boldsymbol{Z} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, 33 \cdot \boldsymbol{I}_4)$. Die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ sei

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 2+i \\ 1 & 0 & -1+i \\ 0 & \sqrt{8} & 0 \\ -1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Kapazität des Kanals (bzgl. ln).

b) Geben Sie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{Q}$ der Eingabe $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{SCN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$ an, für welche die Kapazität des Kanals angenommen wird.