

4. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Rudolf Mathar, Georg Böcherer, Daniel Bielefeld
09.05.2008

Aufgabe 1. Seien $n \in \mathbb{N}$, $L > 0$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$. Zeigen Sie, dass das Optimierungsproblem

$$\max_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+} \prod_{i=1}^n (x_i + \lambda_i), \text{ so dass } \sum_{i=1}^n x_i \leq L$$

die Lösung $x_i = (\nu - \lambda_i)^+$ besitzt, wobei ν die eindeutige Lösung ist von

$$\sum_{i=1}^n (\nu - \lambda_i)^+ = L.$$

Hinweis: Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

- Zeigen Sie, dass für jede optimale Lösung (x_1, \dots, x_n) gilt
 - (i) $\sum_{i=1}^n x_i = L$,
 - (ii) $x_i + \lambda_i = x_j + \lambda_j$ für alle $x_i, x_j > 0$.
- Folgern Sie $x_i = (\nu - \lambda_i)^+$ für alle i und $\sum_{i=1}^n (\nu - \lambda_i)^+ = L$.

Aufgabe 2. Für die Datenübertragung von einem Server zu einem Clientrechner stehen drei parallele Leitungen zur Verfügung. Da die Leitungen in einem Kabelkanal verlegt sind, ist das normalverteilte additive Rauschen auf den Leitungen korreliert und besitzt die Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 23 & -1 & -10 \\ -1 & 23 & -10 \\ -10 & -10 & 32 \end{pmatrix}.$$

Der Server kann mit einer maximalen Sendeleistung von $L = 8$ senden, wobei die Leistung beliebig auf die Leitungen verteilt werden kann.

- a) Wie groß ist die Kapazität des Kanals bestehend aus den drei Leitungen?
- b) Für welche Inputverteilung wird die Kapazität angenommen?