

6. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr. Anke Schmeink, Martijn Arts, Andreas Bollig, Christoph Schmitz

24.05.2012

Aufgabe 1. Es seien \mathbf{A} und \mathbf{B} zwei hermitesche positiv definite $n \times n$ -Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathbf{A} > \mathbf{B} \Rightarrow |\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}|.$$

($\mathbf{A} > \mathbf{B}$ ist eine Kurzschreibweise für “die Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ ist positiv definit”).

Aufgabe 2. Sei $\mathbf{A} = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ eine positiv definite hermitesche Matrix. Zeigen Sie die Gültigkeit der Hadamard Ungleichung

$$|\mathbf{A}| \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Hinweis: Definieren Sie einen Zufallsvektor $\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{A})$ und verwenden Sie die Eigenschaft $H(Y|Z) \leq H(Y)$ der differentiellen Entropie und die Kettenregel

$$H(Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{i=1}^n H(Y_i | Y_1, \dots, Y_{i-1}).$$

Aufgabe 3. Es seien $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ komplexwertige Matrizen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\det(\mathbf{I}_m + \mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{I}_n + \mathbf{B}\mathbf{A}),$$

wobei \mathbf{I}_m und \mathbf{I}_n jeweils die $m \times m$ - bzw. $n \times n$ -Einheitsmatrizen sind.

Hinweis: Für die Determinante einer $(m+n) \times (m+n)$ Matrix \mathbf{H} mit

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{m \times m}, \quad \mathbf{D} \in \mathbb{C}^{m \times n}, \quad \mathbf{E} \in \mathbb{C}^{n \times m}, \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

gilt

$$\det(\mathbf{H}) = \det(\mathbf{C}) \cdot \det(\mathbf{F} - \mathbf{E}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}).$$