# 13. Übung zur Theoretischen Informationstechnik II

Prof. Dr.-Ing. Anke Schmeink, Martijn Arts, Niklas Koep, Christoph Schmitz
15.07.2015

**Aufgabe 1.** Es werde das folgende Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x^2+1 \\ \text{s.d.} & (x-2)(x-4) \leq 0 \end{array}$$

für $x \in \mathbb{R}$ betrachtet.

**a)** Zeigen Sie, dass die Zielfunktion $f(x) = x^2 + 1$ konvex ist.

**b)** Geben Sie die zulässige Lösungsmenge des Problems an.

**c)** Bestimmen Sie die optimale Lösung des Problems unter Verwendung der KKT-Bedingungen.

**Aufgabe 2.** Gegeben sei das unten dargestellte MIMO-System. Das eingangsseitige Datensymbol $x$ soll ausgangsseitig möglichst gut durch $\hat{x}$ rekonstruiert werden. Ziel der Aufgabe ist es, hierfür die optimalen Sende- und Empfangsvektoren $\boldsymbol{b}$ bzw. $\boldsymbol{a}$ zu bestimmen.

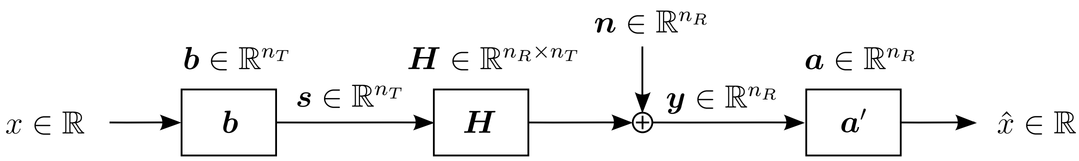


Abbildung 1: MIMO-System

Für die gesamte Aufgabe werden folgende Annahmen gemacht: Es gibt keine Unterscheidung bezüglich der Groß- und Kleinschreibung der Zufallsgrößen $x$ und $\boldsymbol{n}$ und deren Realisierung. Das mittelwertfreie Datensymbol ist normiert auf $\mathrm{E}(x^2) = 1$. Für die additive Störung gilt $\boldsymbol{n} \sim \mathrm{N}_{n_R}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{n}})$. Die Kanalmatrix $\boldsymbol{H}$ sei fest und bei Sender und Empfänger bekannt.

**a)** Geben Sie $\hat{x}$ in Abhängigkeit des Eingangssymbols $x$ und des Störterms $\boldsymbol{n}$ an.

**b)** Das Sendesymbol $\boldsymbol{s}$ unterliege einer Leistungsbeschränkung $\mathrm{E}(\boldsymbol{s}'\boldsymbol{s}) \leq P_T$. Zeigen Sie, dass diese Leistungsbeschränkung ausschließlich in Abhängigkeit des Sendevektors $\boldsymbol{b}$ formuliert werden kann.

Zur Rekonstruktion von $\hat{x}$ soll der mittlere quadratische Fehler (*mean square error*, MSE), definiert als

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) &= \mathrm{E}((x-\hat{x})^2)\\ &= \boldsymbol{a}'(\boldsymbol{H}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{\Sigma}_n)\boldsymbol{a} + 1 - \boldsymbol{a}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{H}'\boldsymbol{a}\,,\end{aligned}$$

bezüglich des Sendevektors $\boldsymbol{b}$ und des Empfangsvektors $\boldsymbol{a}$ minimiert werden. Das zugehörige Optimierungsproblem lautet für diesen Fall

$$\begin{aligned}\min \quad & \mathrm{MSE}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\ \text{s.d.} \quad & \mathrm{tr}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T) \le P_T\,.\end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass dieses Problem durch hierarchische Optimierung getrennt gelöst werden kann. Es soll daher zuerst ein optimaler Empfangsvektor $\boldsymbol{a}^\star$ als Lösung von

$$\min_{\boldsymbol{a}} \quad \mathrm{MSE}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

bestimmt werden.

**c)** Bestimmen Sie einen optimalen Empfangsvektor $\boldsymbol{a}^\star$, der $\mathrm{MSE}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ minimiert. Gehen Sie dabei davon aus, dass der Vektor $\boldsymbol{b}$ fest ist.

**Hinweis:** Es gelten die Beziehungen

$$\frac{\partial \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{D}')\boldsymbol{x}\,.$$

**d)** Zeigen Sie, dass obiges Optimierungsproblem ein konvexes Optimierungsproblem ist. Verwenden Sie dazu die folgendene Beziehung zwischen einer zweifach differenzierbaren, konvexen Funktion $f$ und ihrer Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$:

$$f(\boldsymbol{x}) \text{ ist konvex} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^2 f(\boldsymbol{x}) \ge \boldsymbol{0}\,.$$

**e)** Zeigen Sie mit Hilfe der Beziehung

$$\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{\Sigma}_n\right)^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{b}\frac{1}{1+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{H}'\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{b}}$$

die Gültigkeit von

$$\mathrm{MSE}(\boldsymbol{b}) := \mathrm{MSE}(\boldsymbol{a}^\star,\boldsymbol{b}) = \frac{1}{1+\boldsymbol{b}'\boldsymbol{H}'\boldsymbol{\Sigma}_n^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{b}}\,.$$

Im Folgenden soll nun ein optimaler Sendevektor $\boldsymbol{b}^\star$ bestimmt werden. Hierfür ist das verbleibende Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}\min \quad & \mathrm{MSE}(\boldsymbol{b})\\ \text{s.d.} \quad & \mathrm{tr}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}') \le P_T\end{aligned}$$

zu lösen. Aus der Matrix-Analysis ist das sogenannte Rayleigh-Ritz-Theorem bekannt. Dieses besagt, dass für eine hermitesche Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}) = \max_{\boldsymbol{x}}\left\{\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x} = 1\right\},$$

wobei $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$ den größten Eigenwert der Matrix $\boldsymbol{A}$ bezeichnet.

**f)** Finden Sie unter Berücksichtigung des Rayleigh-Ritz-Theorems einen optimalen Sendevektor $\boldsymbol{b}^\star$. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Leistungsbeschränkung mit Gleichheit erfüllt wird.

**g)** Erklären Sie das Ergebnis aus Unterpunkt **f)**.