Prof. Dr. Anke Schmeink, Dr. Gholamreza Alirezaei, Martijn Arts, Christoph Schmitz

Zusatzübung

Montag, 18. Juli 2016

Aufgabe 1. Die Aufgabe besteht aus zwei Teilen, die unabhängig voneinander lösbar sind.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den natürlichen Logarithmus.

Teil I

a) Gegeben sei die Funktion $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } x \in [\alpha, 0], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter $\alpha < 0$ so, dass f_X die Dichtefunktion einer absolut-stetigen Zufallsvariable darstellt.

b) Bestimmen Sie die differentielle Entropie von X.

Hinweis: Es gilt

$$\int \frac{\ln(u)}{u} \mathrm{d}u = \frac{(\ln(u))^2}{2} + \text{const.}$$

c) Es sei Y eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, d.h. $Y \sim \mathrm{N}(0,1)$. Bestimmen Sie den kleinstmöglichen Parameter $\beta > 0$, so dass

$$\mathrm{H}(X) \leq \mathrm{H}(\beta Y)$$

gilt und geben Sie die differentielle Entropie von βY explizit an.

d) Es sei Z eine absolut-stetige Zufallsvariable einer beliebigen Verteilung mit Varianz σ^2. Geben Sie den kleinstmöglichen Parameter $\gamma > 0$ an, so dass allgemein

$$\mathrm{H}(Z) \leq \mathrm{H}(\gamma Y)$$

gilt.

Teil II

e) Zeigen Sie, dass die Kullback-Leibler-Distanz additiv ist für unabhängige Verteilungen. Betrachten Sie dazu die absolut-stetig verteilten Zufallsvektoren $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ und $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$. Dabei gilt dass X_1, X_2, Y_1 und Y_2 jeweils paarweise stochastisch unabhängig sind. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{X} \parallel \boldsymbol{Y}) = \mathrm{D}(X_1 \parallel Y_1) + \mathrm{D}(X_2 \parallel Y_2).$$

gilt.

Hinweis: Die Kullback-Leibler-Distanz zwischen zwei absolut stetigen Zufallsvektoren lautet:

$$\mathrm{D}(\boldsymbol{X} \parallel \boldsymbol{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \ln \frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})}{f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x})} \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Aufgabe 2.

Anmerkung: Verwenden Sie in dieser Aufgabe den Logarithmus dualis ($\log_2$).

Gegeben sei eine QPSK-Modulation, d.h. eine Modulation bei der vier diskrete Signalpunkte in der komplexen Ebene auf einem Kreis liegen. Im vorliegenden Fall kann die Modulation mit Hilfe zweier binärer Zufallsvariablen U und V mit Träger $\{-c, c\}$ beschrieben werden, die stochastisch unabhängig verteilt sind mit $P(U = c) = p$ und $P(V = c) = p$. Das modulierte Signal ergibt sich dann als $X = U + iV$. Für die Parameter gilt $c > 0$ und $p \in (0, 1)$.

a) Skizzieren Sie die Signalkonstellation von X in einem komplexen Koordinatensystem.

Das modulierte Signal X werde über einen Kanal übertragen, der additives Rauschen verursacht, welches mit der komplexen Zufallsvariable $N = W + iZ$ beschrieben wird. Das Rauschen kann mit zwei stochastisch unabhängigen und identisch gleichverteilten Zufallsvariablen W und Z modelliert werden, deren Träger das offene Intervall $(-1, 1)$ ist. Der Ausgang des Kanals werde mit Y bezeichnet, sodass $Y = X + N$ gilt.

b) Skizzieren Sie den Träger des Rauschens N in einem komplexen Koordinatensystem.

c) Welche Bedingung muss für den Parameter c gelten, damit der Kanal seine Kapazität erreichen kann? Begründen Sie ihre Antwort.

Falls Sie die vorherigen Unterpunkte nicht gelöst haben, gehen Sie davon aus, dass die Kanalkapazität für $c \geq 2$ erreicht wird.

d) Bestimmen Sie die Entropie $\mathrm{H}(X)$ und die Transinformation $\mathrm{I}(X; Y)$ für die Wahl des Parameters c, der es ermöglicht die Kapazität mit minimaler Sendeleistung zu erreichen.

e) Bestimmen Sie die Kanalkapazität und die kapazitätserreichende Eingabeverteilung.

f) Wie ändert sich die Kapazität, wenn eine BPSK-Modulation mit zwei reellen Signalpunkten ($-c$ und c) verwendet wird?

Aufgabe 3. Auf einer Übertragungsstrecke, die aus drei Leitern besteht, beobachtet der Betreiber an sehr warmen Sommertagen gravierende Störungen. Wegen Erhitzung dehnen sich die Leiter so aus, dass es zwischen der ersten und dritten Leitung zum Kurzschluss kommt. Aus Kostengründen beschließt der Betreiber, nur zwei der Leitungen zu speisen, um zumindest eine geringe Informationsübertragung zu ermöglichen. Aus früheren Messungen ist die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}}$ der mittelwertfreien gaußschen Störgröße $\boldsymbol{Z}$ bekannt. Zudem lässt sich die Übertragungsstrecke durch $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Z}$ modellieren. Dabei darf die Gesamtübertragungsleistung von $L = 8$ nicht überschritten werden. Es gilt

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} \ .$$

a) Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}_a}$ der Rauschgröße $\boldsymbol{Z}_a$ des Teilsystems, das aus dem ersten und dem zweiten Leiter besteht, mit Hilfe der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}}$. Berechnen Sie die zugehörige Kanalkapazität C_a. Beachten Sie dabei die Notation

$$\boldsymbol{Z}_a = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \ .$$

b) Analog zum Unterpunkt a) wird nun das Teilsystem betrachtet, das aus dem zweiten und dem dritten Leiter besteht. Bestimmen Sie die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}_b}$ der Rauschgröße $\boldsymbol{Z}_b$ dieses Teilsystems und die zugehörige Kanalkapazität C_b. Beachten Sie dabei die Notation

$$\boldsymbol{Z}_b = \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} \ .$$

c) Im Fall eines Kurzschlusses wird die Rauschgröße durch $\boldsymbol{Z}_c$ modelliert. Bestimmen Sie analog zu den Unterpunkten a) und b) die Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{Z}_c}$ und die zugehörige Kanalkapazität C_c. Beachten Sie dabei die Notation

$$\boldsymbol{Z}_c = \begin{pmatrix} Z_1 + Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix} \ .$$

d) Welches der beiden Teilsysteme, die unter a) und b) untersucht worden sind, sollte der Betreiber für die Informationsübertragung nutzen? Begründen Sie Ihre Auswahl auch mit Hinblick auf das Ergebnis aus Unterpunkt c).

Aufgabe 4. Es sei $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)'$ mit $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie graphisch oder analytisch, welche der folgenden Mengen konvex sind.

- $\mathcal{S}_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x_1| + |x_2| \leq 1\}$,
- $\mathcal{S}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0.5 \leq |x_1| + |x_2| \leq 1\}$,
- $\mathcal{S}_3 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x_1| + |x_2| \leq 1,\, x_1 \leq |x_2|\}$.

Es seien $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{N}$ gegeben. Mit der Notation $||\boldsymbol{x}||_\infty = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ wird das folgende Optimierungsproblem $(\mathcal{P})$ betrachtet:

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{aligned} &\max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \ \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x} \\ &\text{s.d.} \ ||\boldsymbol{x}||_\infty \leq b, \\ &\qquad x_i \in \{-b, b\},\ i \in \{1, \cdots, n\}\,. \end{aligned}$$

b) Skizzieren Sie die Restriktionsmenge (d.h. die Menge der zulässigen Punkte) des Problems $(\mathcal{P})$ für $n = 2$.

c) Zu welcher Klasse von Optimierungsproblemen gehört $(\mathcal{P})$. Begründen Sie kurz Ihre Aussage.

d) Nennen Sie mindestens eine Methode oder einen Algorithmus mit der/dem die Aufgabe $(\mathcal{P})$ direkt gelöst werden kann.

e) Relaxieren Sie nun die Nebenbedingungen $x_i \in \{-b, b\}$ zu $x_i \in [-b, b]$, $i \in \{1, \cdots, n\}$, und formen Sie die Nebenbedingung $||\boldsymbol{x}||_\infty \leq b$ so um, dass alle Nebenbedingungen in Form linearer Ungleichungen vorliegen. Formulieren Sie mit diesen Änderungen das neue Optimierungsproblem $(\mathcal{P}_1)$.

f) Lösen Sie das Problem $(\mathcal{P}_1)$ in Abhängigkeit von $\boldsymbol{a}$ und b unter Angabe der optimalen Zielfunktion $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}^\star$ und der optimalen Lösung $\boldsymbol{x}^\star$. Sie können hierfür die beiden Notationen $\text{sign}(\boldsymbol{x}) = (\text{sign}(x_1), \cdots, \text{sign}(x_n))'$ und $||\boldsymbol{x}||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ nutzen.

g) Inwieweit unterscheiden sich die beiden Lösungen zu den Aufgaben $(\mathcal{P})$ und $(\mathcal{P}_1)$ voneinander? Begründen Sie kurz Ihre Aussage.